japanese-mathformulas.sty

manual pdf

(mainly for Japanese, LuaLaTeX)

Hugh / Ponkichi

2022 年 10 月 10 日

-機能紹介と注記-

中学高校で習う数学の定理や公式を出力するための sty ファイル。
\NewDocumentCommand によって，インデント数式か別行立て数式かを指定できる。

後の例では記述がないが，[i] か [b] かの指定をしない場合は自動的に [i] とみなされる。

二段組の文書を作成するときは，数式の上下間スペースを減らすために，以下を preamble に記述するとよい。

- Function Introduction and Notes -

This is a style file for compiling basic math formulas.
\NewDocumentCommand allows you to specify whether the formula should be used within a sentence or on a new line.

Although not shown in the examples below, if [i] or [b] is not specified, it is automatically assumed to be [i].

When making two-column document, you are recommended to put these lines at preamble. These reduce the space above and below math expressions.

```
\AtBeginDocument{
  \abovedisplayskip     =0\abovedisplayskip
  \abovedisplayshortskip=0\abovedisplayshortskip
  \belowdisplayskip     =0\belowdisplayskip
  \belowdisplayshortskip=0\belowdisplayshortskip}
```

以下が実例。

Now, here are the actual examples!

\二次式展開 {公式A}[i]

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式A}[b]

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\二次式因数分解 {公式A}[i]

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

\二次式因数分解 {公式A}[b]

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$$

\二次式展開 {公式A}[i]

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式A}[b]

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式B}[i]

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式B}[b]

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

\二次式展開 {公式C}[i]

$$(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$$

\二次式展開 {公式C}[b]

$$(x-a)(x+a) = x^2 - a^2$$

\二次式展開 {公式D}[i]

$(x+a)(x+b)=x+(a+b)x+ab$

\二次式展開 {公式D}[b]

$$(x+a)(x+b)=x+(a+b)x+ab$$

\二次式因数分解 {公式A}[i]

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$

\二次式因数分解 {公式A}[b]

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

\二次式因数分解 {公式B}[i]

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$

\二次式因数分解 {公式B}[b]

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

\二次式因数分解 {公式C}[i]

$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$

\二次式因数分解 {公式C}[b]

$$x^2-a^2=(x-a)(x+a)$$

\二次式因数分解 {公式D}[i]

$x+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$

\二次式因数分解 {公式D}[b]

$$x+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

\平方根 {定義}[i]

a は実数として，$\sqrt{a^2}=|a|$

\平方根 {定義}[b]

a は実数として，

$$\sqrt{a^2}=|a|$$

\平方根 {性質A}[i]

$a\geqq 0$ のとき，$\left(\sqrt{a}\right)^2=\left(-\sqrt{a}\right)^2=a,\ \sqrt{a}\leqq 0$

\平方根 {性質A}[b]

$a \leqq 0$ のとき，

$$\left(\sqrt{a}\right)^2 = \left(-\sqrt{a}\right)^2 = a,\ \sqrt{a} \leqq 0$$

\平方根 {性質B}[i]
$\sqrt{a} = |a|$
\平方根 {性質B}[b]

$$\sqrt{a} = |a|$$

\平方根 {性質C}[i]
$a > 0,\ b > 0,\ a \neq b$ のとき，$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$
\平方根 {性質C}[b]
$a > 0,\ b > 0,\ a \neq b$ のとき，

$$\sqrt{a}\sqrt{b} = \sqrt{ab}$$

\平方根 {性質D}[i]
$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$
\平方根 {性質D}[b]

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

\平方根 {性質E}[i]
$\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$
\平方根 {性質E}[b]

$$\sqrt{k^2 a} = k\sqrt{a}$$

\一次不等式 {性質A}[i]
$a < b$ のとき, $a + c < b + c$
\一次不等式 {性質A}[b]
$a < b$ のとき，

$$a + c < b + c$$

\一次不等式 {性質B}[i]
$c > 0$ のとき，$ac < bc$
\一次不等式 {性質B}[b]

$c > 0$ のとき，

$$ac < bc$$

\一次不等式 {性質C}[i]
$c < 0$ のとき，$ac > bc$
\一次不等式 {性質C}[b]
$c < 0$ のとき，

$$ac > bc$$

\集合 {積集合}[i]
$(A \cap B)$
\集合 {積集合}[b]

$$(A \cap B)$$

\集合 {和集合}[i]
$(A \cup B)$
\集合 {和集合}[b]

$$(A \cup B)$$

\集合 {補集合}[i]
$\left(\overline{A}\right)$
\集合 {補集合}[b]

$$\left(\overline{A}\right)$$

\対偶 {定理}[i]
P ならば Q の命題において，
逆は Q ならば P
裏は P でないならば Q でない
対偶は Q でないならば P でない
対偶と元の命題の真偽は一致する。
\対偶 {定理}[b]
P ならば Q の命題において，
逆は Q ならば P
裏は P でないならば Q でない
対偶は Q でないならば P でない

対偶と元の命題の真偽は一致する。

\対偶 {証明}

【証明】

命題を「p ならば q」とし，p の真理集合を P, q の真理集合を Q とする。

「p ならば q」が真のとき，$Q \subset P \Leftrightarrow \overline{P} \subset \overline{Q}$ より対偶命題「q でないならば p でない」は真。

「p ならば q」が偽のとき，$Q \not\subset P \Leftrightarrow \overline{P} \not\subset \overline{Q}$ より対偶命題「q でないならば p でない」は偽。

従って，対偶命題と元の命題の真偽は一致する。 (Q.E.D.)

\背理法

命題 P ならば Q に対して P でないならば Q と仮定して矛盾を示す。

\二次関数 {標準形}[i]

$y = a(x-p)^2 + q$

\二次関数 {標準形}[b]

$$y = a(x-p)^2 + q$$

\二次関数 {一般形}[i]

$y = ax^2 + bx + c$

\二次関数 {一般形}[b]

$$y = ax^2 + bx + c$$

\二次関数 {切片形}[i]

$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$

\二次関数 {切片形}[b]

$$y = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

\二次関数 {平方完成}[i]

$y = ax^2 + bx + c$ に対して，$y = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right) - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a}$

\二次関数 {平方完成}[b]

$y = ax^2 + bx + c$ に対して，

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right) - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

\二次方程式の解の公式 {公式}[i]

$ax^2 + bx + c = 0\,(a \neq 0)$ に対して，$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

\二次方程式の解の公式 {公式}[b]

$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ に対して，

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

\二次方程式の解の公式 {証明A}[i]

【証明】

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=0\\
a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c&=0\\
a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}\right\}+c&=0\\
a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a}+c&=0\\
\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2&=\frac{b^2-4ac}{4a^2}\\
x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

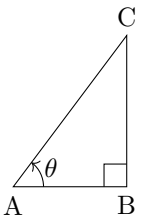
\二次方程式の解の公式 {証明B}[i]

【証明】

$$\begin{aligned}
ax^2+bx+c&=0\\
4a^2x^2+4abx+4ac&=0\\
(2ax+b)^2-b^2+4ac&=0\\
2ax+b&=\pm\sqrt{b^2-4ac}\\
x&=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

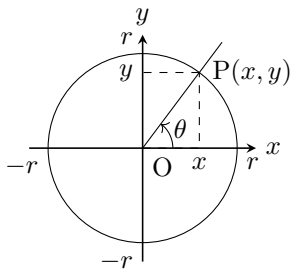
\三角比の定義 {定義A}[i]



図の様な直角 △ABC において $\angle\mathrm{CAB}=\theta$ のとき，

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}},\ \cos\theta=\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}},\ \tan\theta=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$$

\三角比の定義 {定義B}[i]



図において

$$\sin\theta = \frac{y}{r},\ \cos\theta = \frac{x}{r},\ \tan\theta = \frac{y}{x}$$

このとき，$r = 1$ にしても一般性を失わない。

\三角比の相互関係 {公式A}[i]

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

\三角比の相互関係 {公式A}[b]

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

\三角比の相互関係 {公式B}[i]

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$

\三角比の相互関係 {公式B}[b]

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

\三角比の相互関係 {公式C}[i]

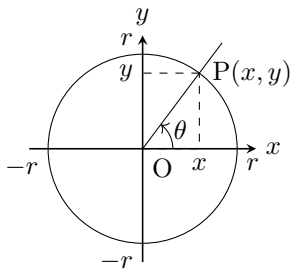
$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$

\三角比の相互関係 {公式C}[b]

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

\三角比の相互関係 {証明}

【証明】



図において，$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，　$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ より

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2 + x^2}{r^2}$$

ここで，三平方の定理より $x^2 + y^2 = r^2$ なので

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$，　$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$　$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ より
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ることで，

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

ここで，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ なので

$$\tan^2\theta + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

(Q.E.D.)

\正弦定理 {公式}[i]

△ABC の外接円の半径を R として，$\dfrac{a}{\sin\mathrm{A}} = 2\mathrm{R}$（$b$, B , c, C についても同様に成立）

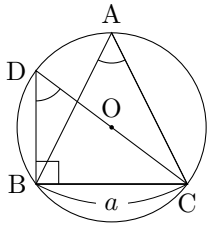
\正弦定理 {公式}[b]

△ABC の外接円の半径を R として，

$$\frac{a}{\sin\mathrm{A}} = 2R$$（b, B, c, C についても同様に成立）

\正弦定理 {証明}

【証明】



図において円周角の定理より，

$$\angle\mathrm{A} = \angle\mathrm{D}$$

なので，円 O の半径を R として $\sin\mathrm{A} = \sin\mathrm{D} = \dfrac{a}{2\mathrm{R}}$ より，

$$\frac{a}{\sin\mathrm{A}} = 2\mathrm{R}$$

(Q.E.D.)

\余弦定理 {公式}[i]

△ABC において，$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\mathrm{A}$

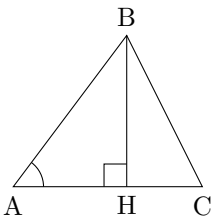
\余弦定理 {公式}[b]

△ABC において，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

\余弦定理 {証明}

【証明】



図において $\mathrm{BC} = a, \mathrm{CA} = b, \mathrm{AC} = c$ として，

$$\mathrm{BH} = c\sin \mathrm{A}, \quad \mathrm{AH} = c\cos \mathrm{A}$$

また，△BHC に三平方の定理を用いることにより

$$\mathrm{CB}^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{HC}^2$$

ここで，$\mathrm{HC} = \mathrm{AC} - \mathrm{AH} = b - c\cos \mathrm{A},\ \mathrm{BH} = c\sin \mathrm{A}$ より

$$\begin{aligned} a^2 &= (c\sin \mathrm{A})^2 + (b - c\cos \mathrm{A})^2 \\ &= c^2 \sin^2 \mathrm{A} + b^2 - 2bc\cos \mathrm{A} + c^2 \cos^2 \mathrm{A} \\ &= c^2 \left(1 - \cos^2 \mathrm{A}\right) + b^2 - 2bc\cos \mathrm{A} + c^2 \cos^2 \mathrm{A} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A} \end{aligned}$$

よって，

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos \mathrm{A}$$

（Q.E.D.）

\三角比の三角形の面積公式 {公式}[i]

△ABC の面積を S として，$S = \dfrac{1}{2}bc\sin \mathrm{A}$

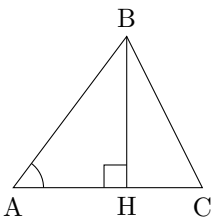
\三角比の三角形の面積公式 {公式}[b]

△ABC の面積を S として，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin \mathrm{A}$$

\三角比の三角形の面積公式 {証明}

【証明】



図において

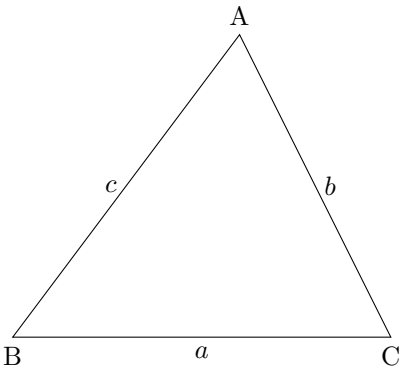
$$\mathrm{BC} = a,\ \mathrm{CA} = B,\ \mathrm{AC} = c$$

また，△ABC の面積を S として $S = \dfrac{1}{2}\mathrm{AC} \times \mathrm{BH}$ と，$\mathrm{AB}\sin\mathrm{A} = \mathrm{BH}$ から，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin\mathrm{A}$$

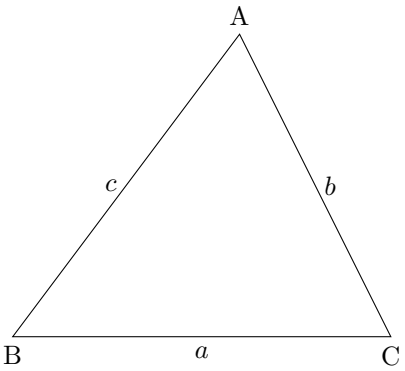
(Q.E.D.)

\ヘロンの公式 {公式}[i]



図において $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ のとき三角形の面積 S は,$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

\ヘロンの公式 {公式}[b]

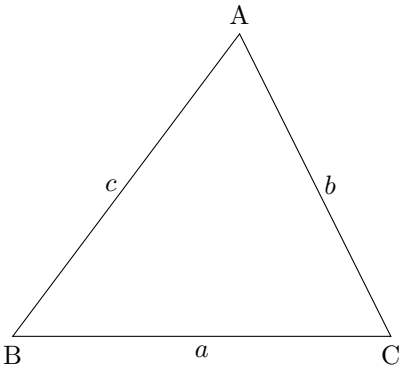


図において $s = \dfrac{a+b+c}{2}$ のとき三角形の面積 S は,

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

\ヘロンの公式 {証明}

【証明】



三角形の面積公式より，

$$S = \frac{1}{2}ab\sin \mathrm{C}$$

ここで $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より，

$$S = \frac{1}{2}ac\sqrt{1-\cos^2 \mathrm{C}}$$

余弦定理より $\cos \mathrm{C} = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ なので，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}ab\sqrt{1-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab)^2-(a-2+b^2-c^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\{(a+b)^2-c^2\}\{c^2-(a-b)^2\}} \\
&= \sqrt{\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2}} \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}
\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\外接円の半径と三角形の面積 {公式}[i]

3 辺の長さが a, b, c の三角形の外接円の半径を R，面積を S とおくと，$S = \dfrac{abc}{4R}$

\外接円の半径と三角形の面積 {公式}[b]

3 辺の長さが a, b, c の三角形の外接円の半径を R，面積を S とおくと，

$$S = \frac{abc}{4R}$$

\外接円の半径と三角形の面積 {証明}

【証明】

正弦定理より，

$$a = 2R\sin \mathrm{A}$$

三角形の面積の公式から，

$$S = \frac{1}{2}bc\sin \mathrm{A}$$

以上の 2 式より，

$$S = \frac{abc}{4R}$$

(Q.E.D.)

\三角形の面積公式

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}bc\sin \mathrm{A} && \cdots\cdots ① \\
&= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \ \left(s = \frac{a+b+c}{2}\right) && \cdots\cdots ② \\
&= rs && \cdots\cdots ③ \\
&= \frac{abc}{4R} && \cdots\cdots ④ \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\vec{a}\right|^2\left|\vec{b}\right|^2 - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)^2} && \cdots\cdots ⑤ \\
&= \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1| && \cdots\cdots ⑥
\end{aligned}$$

\場合の数と確率 {和集合の要素の個数}[i]

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

\場合の数と確率 {和集合の要素の個数}[b]

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

\場合の数と確率 {補集合の要素の個数}[i]

全体集合を U として，$n\left(\overline{A}\right) = n(U) - n(A)$

\場合の数と確率 {補集合の要素の個数}[b]

全体集合を U として，

$$n\left(\overline{A}\right) = n(U) - n(A)$$

\場合の数と確率 {和の法則}[i]

二つの事象 A, B に対して，A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りのとき，A または B の起こる場合の数は $a + b$ 通り

\場合の数と確率 {和の法則}[b]

二つの事象 A, B に対して，A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りのとき，A または B の起こる場合の数は $a + b$ 通り

\場合の数と確率 {積の法則}[i]

二つの事象 A, B に対して，A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りのとき，A かつ B の起こる場合の数は ab 通り

\場合の数と確率 {積の法則}[b]

二つの事象 A, B に対して，A の起こり方が a 通り，B の起こり方が b 通りのとき，A かつ B の起こる場合の数は ab 通り

\場合の数と確率 {順列}[i]

異なる n 個のものから r 個選んで並べる場合の数は ${}_n\mathrm{P}_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$

\場合の数と確率 {順列}[b]

異なる n 個のものから r 個選んで並べる場合の数は

$$ {}_n\mathrm{P}_r = \frac{n!}{(n-r)!} $$

\場合の数と確率 {順列の証明}

【証明】

異なる n 個のものから r 個選んで並べる場合の数は，

$$ n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} $$

ここで，$\dfrac{n!}{(n-r)!}$ を ${}_nP_r$ と表す。 (Q.E.D.)

\場合の数と確率 {円順列}[i]

異なる n 個のものを円に並べる場合の数は $(n-1)!$

\場合の数と確率 {円順列}[b]

異なる n 個のものを円に並べる場合の数は

$$ (n-1)! $$

\場合の数と確率 {円順列の証明}

【証明】

n 個のものを円形に並べるとき，1 つを固定して考えると，残り $n-1$ 個を並べる順列の個数に等しい。よって $(n-1)!$ 通りとなる。

\場合の数と確率 {重複順列}[i]

n 個から r 個，重複を許して並べる場合の数は n^r

\場合の数と確率 {重複順列}[b]

n 個から r 個，重複を許して並べる場合の数は

$$ n^r $$

\場合の数と確率 {組み合わせ}[i]

異なる n 個のものから r 個選ぶ場合の数は，${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

\場合の数と確率 {組み合わせ}[b]

異なる n 個のものから r 個選ぶ場合の数は，

$$ {}_n\mathrm{C}_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} $$

\場合の数と確率 {組み合わせの証明}

【証明】

異なる n 個のものから r 個選ぶ場合の数は，順列を重複度で割ったものなので

$$\frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

ここで，$\dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$ を ${}_n\mathrm{C}_r$ と表す。 (Q.E.D.)

\場合の数と確率 {同じものを含む順列}[i]

a が p 個，b が q 個，c が r 個，とあるとき，それら全部を並べる場合の数は，$\dfrac{n!}{p!q!r!}$（ただし，$p+q+r=n$）

\場合の数と確率 {同じものを含む順列}[b]

a が p 個，b が q 個，c が r 個，とあるとき，それら全部を並べる場合の数は，

$$\frac{n!}{p!q!r!}\ (\text{ただし，}p+q+r=n)$$

\場合の数と確率 {同じものを含む順列の証明}

【証明】

n 個のものを並べる場合の数は $n!$ 通りだが，n 個の中に同じものが含まれているので，重複度で割ることで $\dfrac{n!}{p!q!r!}$ を得る。 (Q.E.D.)

\場合の数と確率 {確率の定義}[i]

全事象 U のどの根元事象も同様に確からしいとき，事象 A の起こる確率は，$P(A) = \dfrac{n(A)}{n(U)}$

\場合の数と確率 {確率の定義}[b]

全事象 U のどの根元事象も同様に確からしいとき，事象 A の起こる確率は，

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

\場合の数と確率 {排反の定義}[i]

事象 A, B が同時に起こりえないとき，A と B は互いに排反であるという。

\場合の数と確率 {排反の定義}[b]

事象 A, B が同時に起こりえないとき，A と B は互いに排反であるという。

\場合の数と確率 {確率の性質A}[i]

任意の事象 A に対して，$0 \leqq A \leqq 1$

\場合の数と確率 {確率の性質A}[b]

任意の事象 A に対して，

$$0 \leqq A \leqq 1$$

\場合の数と確率 {確率の性質B}[i]

全事象 U の確率 $P(U) = 1$

\場合の数と確率 {確率の性質B}[b]

全事象 U の確率

$$P(U) = 1$$

\場合の数と確率 {和事象の確率}[i]

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

\場合の数と確率 {和事象の確率}[b]

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

\場合の数と確率 {積事象の確率}[i]
$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$
\場合の数と確率 {余事象の確率}[b]

$$P\left(\overline{A}\right) = 1 - P(A)$$

\場合の数と確率 {独立な事象の確率}[i]
事象 A と B が独立のとき，事象 A が起こりかつ事象 B が起こる確率 p は，$p = P(A)\,P(B)$
\場合の数と確率 {独立な事象の確率}[b]
事象 A と B が独立のとき，事象 A が起こりかつ事象 B が起こる確率 p は，

$$p = P(A)\,P(B)$$

\場合の数と確率 {反復試行の確率}[i]
一回の試行で事象 A の起こる確率を p として，この試行を n 回行う反復試行で A が r 回起こる確率は，
${}_n\mathrm{C}_r\,(p)^r\,(1-p)^{n-r}$
\場合の数と確率 {反復試行の確率}[b]
一回の試行で事象 A の起こる確率を p として，この試行を n 回行う反復試行で A が r 回起こる確率は，

$${}_n\mathrm{C}_r\,(p)^r\,(1-p)^{n-r}$$

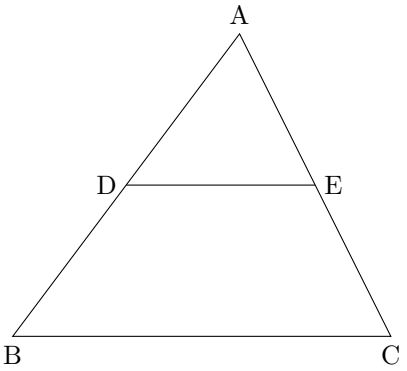
\場合の数と確率 {反復試行の確率の証明}
【証明】
n 回の試行のうち事象 A が r 回起こる順番の場合の数は ${}_nC_r$ 通り。さらに，A が起こる確率は p で r 回起こり，A の余事象が起こる確率は $p-1$ で $n-r$ 回起こるので，

$${}_n\mathrm{C}_r\,(p)^r\,(1-p)^{n-r}$$

となる。 (Q.E.D.)
\場合の数と確率 {条件付き確率}[i]
事象 A が起こったときの事象 B の起こる確率は，$P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$
\場合の数と確率 {条件付き確率}[b]
事象 A が起こったときの事象 B の起こる確率は，

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

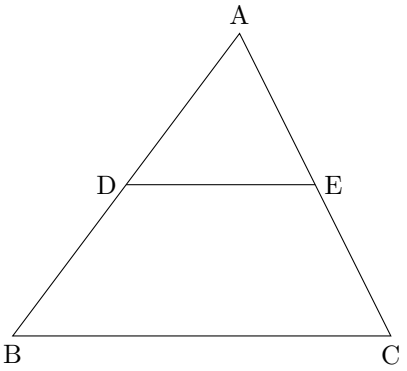
\平行線と線分比の性質 {公式A}



図において,

$$\mathrm{AD} : \mathrm{AB} = \mathrm{AE} : \mathrm{AC} = \mathrm{DE} : \mathrm{BC}$$

\平行線と線分比の性質 {公式B}

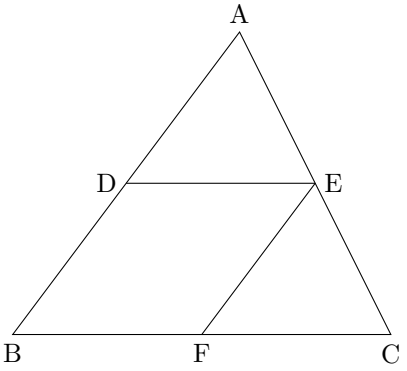


図において,

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DB} = \mathrm{AE} : \mathrm{EC}$$

\平行線と線分比の性質 {証明}

【証明】



図において,

$$\mathrm{DE} /\!/ \mathrm{BC}$$

$$\Leftrightarrow \angle\mathrm{ADE} = \angle\mathrm{ABC},\ \angle\mathrm{AED} = \angle\mathrm{ACB}$$

よって，$\triangle ADE \backsim \triangle ABC \Leftrightarrow AD : AB = AE : AC = DE : BC$
また，図において，

$AB /\!/ EF \Leftrightarrow \angle CEF = \angle CAB,\ \angle CFE = \angle CBA$

また，

$DE /\!/ BC \Leftrightarrow \angle EDA = \angle CBA$

これと $\angle CFE = \angle CBA$ より，

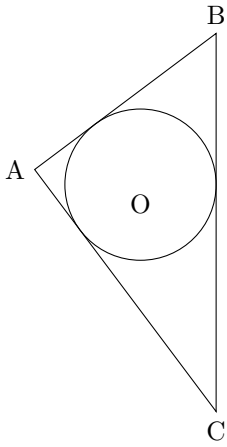
$\angle EDA = \angle CFE$

よって，$\triangle ADE \backsim \triangle EFC \Leftrightarrow AD : EF = AE : EC$ ここで，

$EF = DB \Leftrightarrow AD : DB = AE : EC$

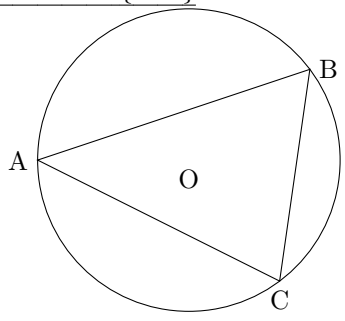
(Q.E.D.)

\図形の性質 {内心}



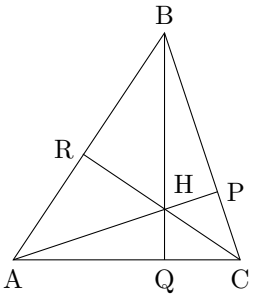
図において O が内心

\図形の性質 {外心}



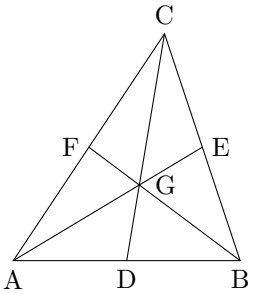
図において O が外心

\図形の性質 {垂心}



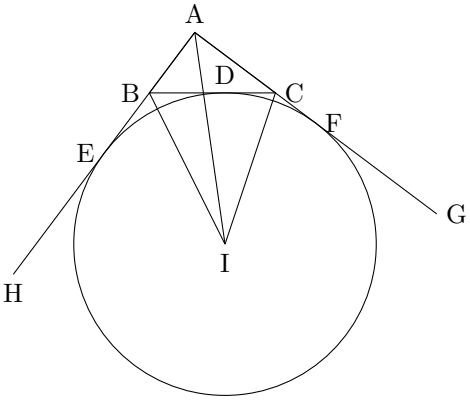
図において H が垂心

\図形の性質 {重心}



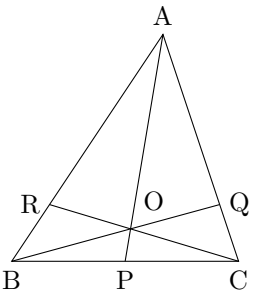
図において G が重心

\図形の性質 {傍心}



図において I が傍心

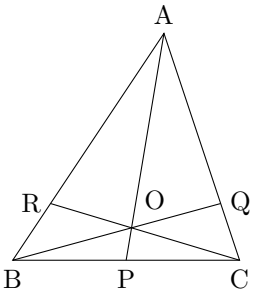
\図形の性質 {チェバの定理}



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

\図形の性質 {チェバの定理の証明}

【証明】



図において三角形の面積比を考えると，

$$\triangle \mathrm{ABO} : \triangle \mathrm{ACO} = \mathrm{BP} : \mathrm{CP}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\triangle \mathrm{ABO}}{\triangle \mathrm{ACO}} = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}$$

同様にして，$\dfrac{\triangle \mathrm{BCO}}{\triangle \mathrm{BAO}} = \dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}$，$\dfrac{\triangle \mathrm{CAO}}{\triangle \mathrm{CBO}} = \dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}$

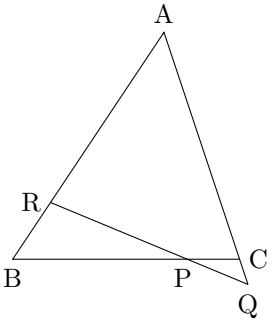
ここで，

$$\frac{\triangle \mathrm{ABO}}{\triangle \mathrm{ACO}} \cdot \frac{\triangle \mathrm{BCO}}{\triangle \mathrm{BAO}} \cdot \frac{\triangle \mathrm{CAO}}{\triangle \mathrm{CBO}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

（Q.E.D.）

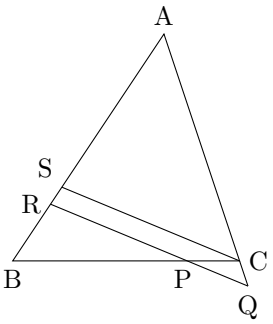
\図形の性質 {メネラウスの定理}



$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

\図形の性質 {メネラウスの定理の証明}

【証明】



SC // RP より,

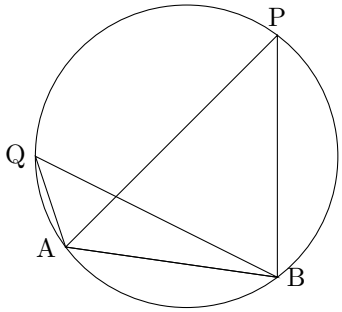
$$\mathrm{RA} : \mathrm{SR} = \mathrm{QA} : \mathrm{CQ},\ \mathrm{BR} : \mathrm{RS} = \mathrm{BP} : \mathrm{PC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} = \frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{AR}},\ \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RS}}$$

$$\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}} \cdot \frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = \frac{\mathrm{BR}}{\mathrm{RS}} \cdot \frac{\mathrm{SR}}{\mathrm{AR}} \cdot \frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}} = 1$$

(Q.E.D.)

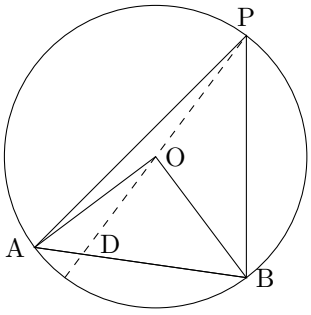
\図形の性質 {円周角の定理}



$\angle \mathrm{APB} = \angle \mathrm{AQB}$

\図形の性質 {円周角の定理の証明}

【証明】



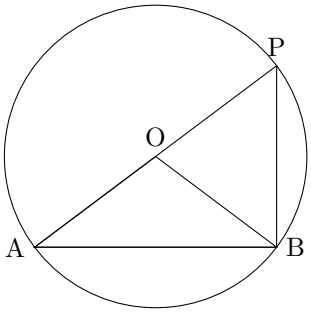
△AOP, △BOP は二等辺三角形なので,

$$\angle \mathrm{APO} = \angle \mathrm{OAP},\ \angle \mathrm{BPO} = \angle \mathrm{OBP}$$

外角定理より,

$$\angle \mathrm{AOD} = 2\angle \mathrm{APO},\ \angle \mathrm{BOD} = 2\angle \mathrm{BPO}$$

$$\Leftrightarrow \angle \mathrm{AOB} = 2\angle \mathrm{APB}$$

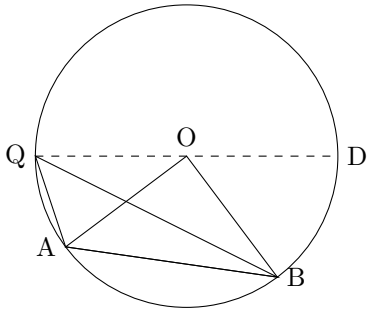


△OPB は二等辺三角形なので,

$$\angle \mathrm{OPB} = \angle \mathrm{OBP}$$

外角定理より

$$\angle \mathrm{AOB} = 2\angle \mathrm{OPB}$$



△QOA, △OQB は二等辺三角形なので,

$$\angle \mathrm{OQA} = \angle \mathrm{OAQ},\ \angle \mathrm{OQB} = \angle \mathrm{OBQ}$$

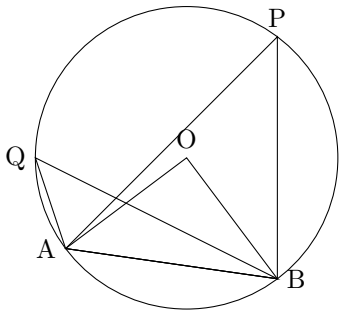
外角定理より,

$$\angle \mathrm{OQA} + \angle \mathrm{OAQ} = \angle \mathrm{DOA},\ \angle \mathrm{OQB} + \angle \mathrm{OBQ} = \angle \mathrm{DOB}$$

$$\Leftrightarrow \angle \mathrm{DOA} - \angle \mathrm{DOB} = 2\left(\angle \mathrm{OQA} - \angle \mathrm{BQO}\right)$$

$$\Leftrightarrow \angle \mathrm{AOB} = 2\angle \mathrm{AQB}$$

従って，円に内接する三角形について，円周角の 2 倍が中心角である。



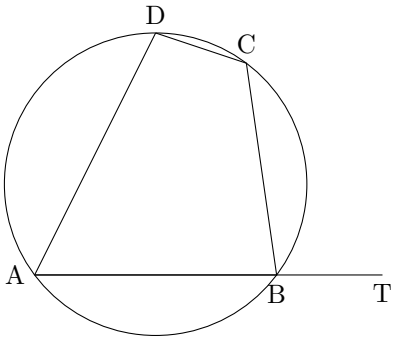
以上より，以下が成立。

$$\angle \mathrm{APB} = 2\angle \mathrm{AOB}, \angle \mathrm{AQB} = 2\angle \mathrm{AOB}$$

$$\Leftrightarrow \angle \mathrm{AQB} = \angle \mathrm{APB}$$

(Q.E.D.)

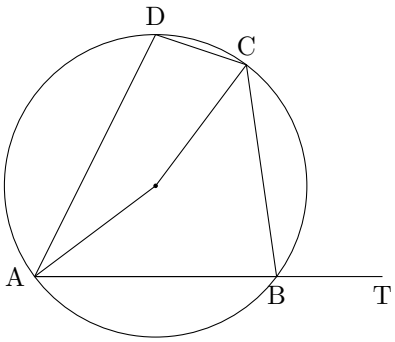
\図形の性質 {内接四角形の定理}



$\angle \mathrm{ADC} = \angle \mathrm{CBT}$

\図形の性質 {内接四角形の定理の証明}

【証明】



$\angle \mathrm{AOC} = 2\angle \mathrm{ABC}$

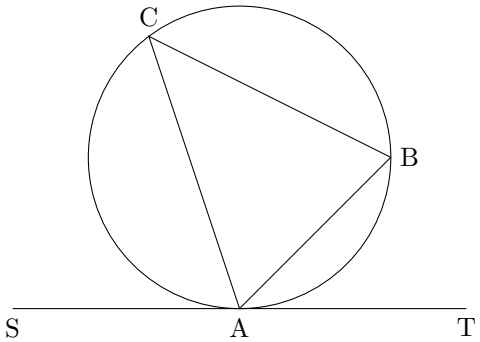
$\angle \mathrm{AOC} = 2\angle \mathrm{ADC}$

ここで，$\angle \mathrm{ABC} + \angle \mathrm{ADC} = 180^\circ$

$\Leftrightarrow \angle \mathrm{AOC} + \angle \mathrm{AOC} = 180^\circ$

(Q.E.D.)

\図形の性質 {接弦定理}

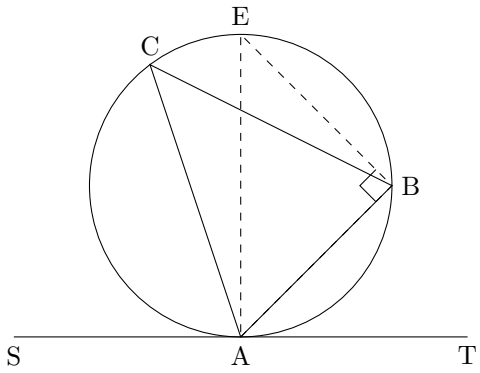


$\angle \mathrm{BAT} = \angle \mathrm{ACB}$

\図形の性質 {接弦定理の証明}

【証明】

1. 鋭角のとき



△ACB と △ABE について円周角の定理より,

$$\angle ACB = \angle AEB$$

ここで，△ABE について

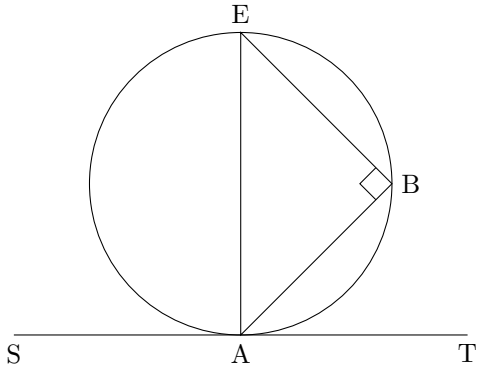
$$\angle BEA + \angle BAE = 90^\circ$$

また，AT が円の接線なので $\angle BAE + \angle BAT = 90^\circ$ から,

$$\angle BAT = \angle AEB$$

$$\Leftrightarrow \angle ACB = \angle BAT$$

2. 直角のとき

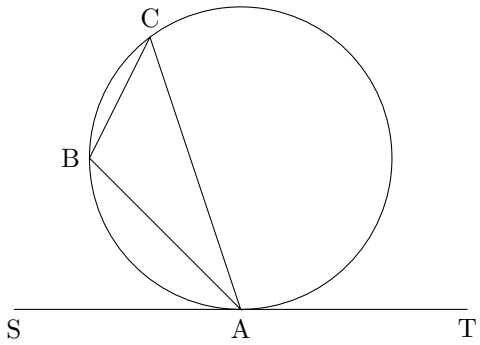


AT が円の接線なので,

$$\angle EAS = 90^\circ$$

$$\Leftrightarrow \angle EBA = \angle EAS$$

3. 鈍角のとき



鋭角のときの接弦定理より，

$$\angle \mathrm{BCA} = \angle \mathrm{BAS}$$

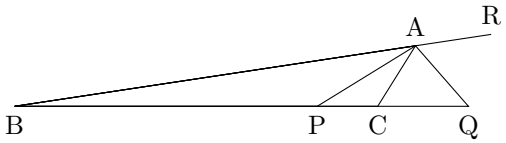
また，△ABC において

$$\angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{ACB} + \angle \mathrm{BAC}$$

$$\Leftrightarrow \angle \mathrm{ABC} = \angle \mathrm{CAT}$$

従って円に内接する三角形について成り立つことが証明された。 (Q.E.D.)

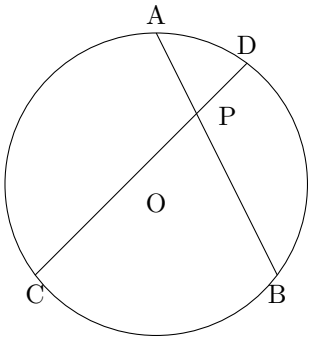
\図形の性質 {内角と外角の二等分線}



$\angle \mathrm{BAP} = \angle \mathrm{PAC}, \angle \mathrm{CAQ} = \angle \mathrm{QAR}$ のとき，

$$\mathrm{BP} : \mathrm{PC} = \mathrm{BQ} : \mathrm{QC} = \mathrm{AB} : \mathrm{AC}$$

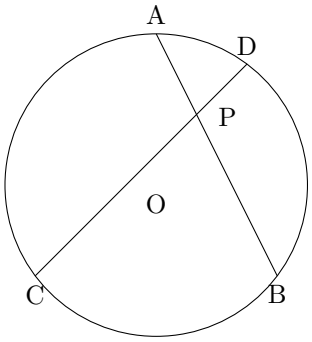
\図形の性質 {方べきの定理A}



$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$

\図形の性質 {方べきの定理Aの証明}

【証明】



円周角の定理より，

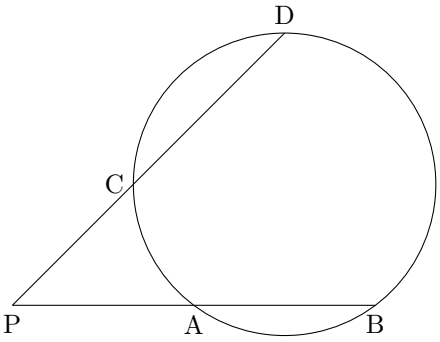
$$\angle \mathrm{CAP} = \angle \mathrm{BDP}, \quad \angle \mathrm{ACP} = \angle \mathrm{DBP}$$

$\triangle \mathrm{ACP} \backsim \triangle \mathrm{DBP}$ より，

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$

(Q.E.D.)

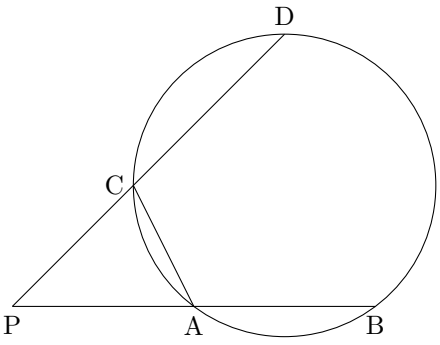
\図形の性質 {方べきの定理B}



$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$

\図形の性質 {方べきの定理Bの証明}

【証明】



内接四角形の証明より，

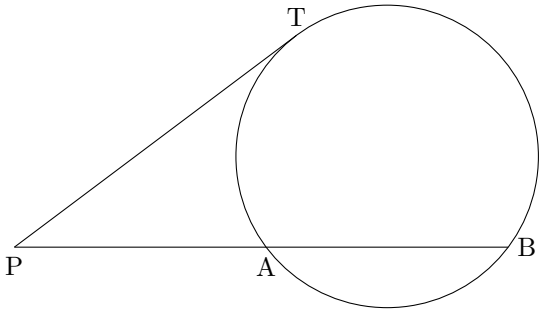
$$\angle \mathrm{CDB} = \angle \mathrm{CAP}, \ \angle \mathrm{DBA} = \angle \mathrm{PCA}$$

$\triangle \mathrm{ACP} \backsim \triangle \mathrm{DPB}$ より，

$$\mathrm{PA} \cdot \mathrm{PB} = \mathrm{PC} \cdot \mathrm{PD}$$

(Q.E.D.)

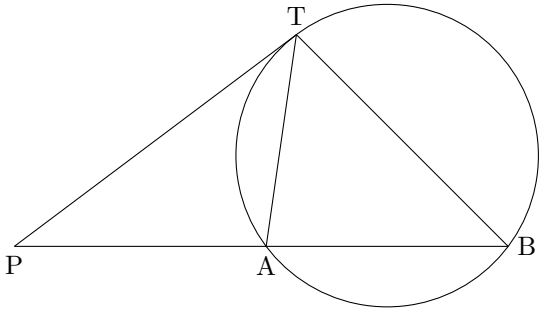
\図形の性質 {方べきの定理C}



$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$

\図形の性質 {方べきの定理Cの証明}

【証明】



接弦定理より，

$$\angle\mathrm{TBA}=\angle\mathrm{PTA}$$

これと，$\angle$P は共通なので $\triangle\mathrm{PTA}\backsim\triangle\mathrm{PBT}$ より，

$$\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}=\mathrm{PT}^2$$

(Q.E.D.)

\三次式展開 {公式A}[i]

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

\三次式展開 {公式A}[b]

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

\三次式展開 {公式B}[i]

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

\三次式展開 {公式B}[b]

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

\三次式展開 {公式C}[i]
$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$
\三次式展開 {公式C}[b]

$$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)=a^3+b^3$$

\三次式展開 {公式D}[i]
$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$
\三次式展開 {公式D}[b]

$$(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)=a^3-b^3$$

\三次式因数分解 {公式A}[i]
$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$
\三次式因数分解 {公式A}[b]

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

\三次式因数分解 {公式B}[i]
$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$
\三次式因数分解 {公式B}[b]

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

\三次式因数分解 {公式C}[i]
$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$
\三次式因数分解 {公式C}[b]

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

\三次式因数分解 {公式D}[i]
$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$
\三次式因数分解 {公式D}[b]

$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

\二項定理 {公式}[i]

$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + ...{}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$

\二項定理 {公式}[b]

$$(a+b)^n = {}_n\mathrm{C}_0 a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1}b + {}_n\mathrm{C}_2 a^{n-2}b^2 + ...{}_n\mathrm{C}_{n-1} ab^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n b^n$$

\二項定理 {一般項}[i]

${}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$

\二項定理 {一般項}[b]

$$ {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

\二項定理 {証明}

【証明】

$(a+b)^n$ を展開すると，$a^r b^{n-r}$ の項の係数は n 個の a から r 個 a を選ぶ場合の数に等しいので係数は ${}_nC_r$

よって，一般項は

$$ {}_n\mathrm{C}_r a^{n-r}b^r$$

この r に 1 から順番に自然数を代入したものが二項定理となる。 (Q.E.D.)

\分数式 {公式A}[i]

$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$

\分数式 {公式A}[b]

$$\frac{A}{B} \times \frac{C}{D} = \frac{AC}{BD}$$

\分数式 {公式B}[i]

$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$

\分数式 {公式B}[b]

$$\frac{A}{B} \div \frac{C}{D} = \frac{AD}{BC}$$

\分数式 {公式C}[i]

$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$

\分数式 {公式C}[b]

$$\frac{A}{C} + \frac{B}{C} = \frac{A+B}{C}$$

\分数式 {公式D}[i]
$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$
\分数式 {公式D}[b]

$$\frac{A}{C} - \frac{B}{C} = \frac{A-B}{C}$$

\相加相乗平均 {公式}[i]
$a > 0,\ b > 0$ のとき，$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$
\相加相乗平均 {公式}[b]
$a > 0,\ b > 0$ のとき，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

\相加相乗平均 {証明}
【証明】
$a + b - 2\sqrt{ab} \geqq 0$ を示す。

$$a + b - 2\sqrt{ab} = \left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2$$

より，$\sqrt{a} - \sqrt{b}$ は実数なので，

$$\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geqq 0$$

よって，$a > 0,\ b > 0$ のとき，

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$ （等号成立条件は $a = b$）

(Q.E.D.)

\虚数の定義 {定義}[i]
$i = \sqrt{-1}$
\虚数の定義 {定義}[b]

$$i = \sqrt{-1}$$

\複素数の定義 {定義}[i]
実数 $a,\ b$ を用いて，$a + bi$
\複素数の定義 {定義}[b]
実数 $a,\ b$ を用いて，

$$a + bi$$

\二次方程式の解の判別

$ax^2+bx+c=0,\ (a\neq 0)$ の判別式を $D=b^2-4ac$ とすると，$\left\{\begin{array}{l} D>0 \text{ のとき，異なる二つの実数解} \\ D=0 \text{ のとき，重解} \\ D<0 \text{ のとき，異なる二つの虚数解} \end{array}\right\}$

を持つ。

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係A}[i]

$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta$ として，$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係A}[b]

$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta$ として，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$$

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係B}[i]

$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta$ として，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係B}[b]

$ax^2+bx+c=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta$ として，

$$\alpha\beta=\frac{c}{a}$$

\解と係数の関係 {二次方程式の解と係数の関係の証明}

【証明】

$$ax^2+bx+c=a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)=a\left\{x^2-(\alpha+\beta)\,x+\alpha\beta\right\}$$

$$\Leftrightarrow ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

係数比較法より，両辺同次の係数を比較して，

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

（Q.E.D.）

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係A}[i]

$ax^3+bx^2+cx+d=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ として，$\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係A}[b]

$ax^3+bx^2+cx+d=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ として，

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a}$$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係B}[i]

$ax^3+bx^2+cx+d=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ として，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係B}[b]

$ax^3+bx^2+cx+d=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ として，

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a}$$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係C}[i]

$ax^3+bx^2+cx+d=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ として，$\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係C}[b]

$ax^3+bx^2+cx+d=0\,(a\neq 0)$ の解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ として，

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

\解と係数の関係 {三次方程式の解と係数の関係の証明}

【証明】

$$ax^3+bx^2+cx+d=a\,(x-\alpha)\,(x-\beta)\,(x-\gamma)=a\left\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)\,x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)\,x-\alpha\beta\gamma\right\}$$

$$\Leftrightarrow ax^3+bx^2+cx+d=a\left(x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}\right)$$

係数比較法より，両辺同次の係数を比較して，

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{c}{a},\ \alpha\beta\gamma=-\frac{d}{a}$$

(Q.E.D.)

\剰余定理 {定理A}[i]

整式 $P\,(x)$ を $x-k$ で割った余りは $P\,(k)$

\剰余定理 {定理A}[b]

整式 $P\,(x)$ を $x-k$ で割った余りは

$$P\,(k)$$

\剰余定理 {定理B}[i]

整式 $P\,(x)$ を $ax-b$ で割った余りは $P\left(\dfrac{b}{a}\right)$

\剰余定理 {定理B}[b]

整式 $P\,(x)$ を $ax-b$ で割った余りは

$$P\left(\frac{b}{a}\right)$$

\剰余定理 {証明}

【証明】

$P\,(x)$ を $(x-k)$ で割った商を $Q\,(x)$ あまりを R として，

$$P\,(x)=(x-k)\,Q\,(x)+R$$

$x=k$ のとき，

$$P\,(k)=R$$

よって，余りは

$$P\,(k)$$

(Q.E.D.)

\因数定理 {定理}[i]

整式 $P(x)$ が $x-k$ を因数に持つ $\Leftrightarrow P(k)=0$

\因数定理 {定理}[b]

整式 $P(x)$ が $x-k$ を因数に持つ

$$\Leftrightarrow P(k)=0$$

\因数定理 {証明}

【証明】

剰余の定理より，$x-k$ で割った余りが 0 なので，

$$P(k)=0$$

剰余の定理より，$P(k)=0$ ということは $P(x)$ を $x-k$ で割った余りが 0 ということなので，$P(x)$ は $x-k$ を因数に持つ。 (Q.E.D.)

\ユークリッド幾何の公理 {公理A}

二つの異なる二点を与えることで，それを通る直線が一意的に決定する。

\ユークリッド幾何の公理 {公理B}

一つの直線 l と l 上にない一つの点が与えられたとき，与えられた点を通り，l に平行な直線をただ一つ引くことができる。

\直線

両方向に限りなく伸びたまっすぐな線。

\線分

直線 AB のうち，二点 A, B を端とする部分。

\半直線

直線 AB のうち，一方の点を端とし，もう一方に限りなく伸びた部分。

\距離

空でない集合 X の元 $x,\ y$ に対して，実数値 $d(x,\ y)$ が定義され，

$$d(x,\ y)=0 \Leftrightarrow x=y, \quad (x,\ y)=d(y,\ x), \quad (x,\ y) \leqq d(x,\ y)+d(y,\ x)$$

の三つの性質を満たす d を X 上の距離といい，$(X,\ d)$ を距離空間という。

\円

平面上の一点から等しい距離にある点の集合。

\弧

円周上の二点 A, B に対して，A, B によって分けられた円周の各々の部分を弧 AB といい，$\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ と表す。

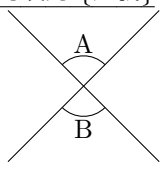
\弦

弧の両端を結んだ線分。

\中心角

円の中心を頂点として，2 辺が弧の両端を通る角を，その弧に対する中心角という。

\対頂角 {定義}



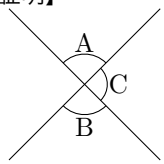
図において，∠A と ∠B を対頂角という。

\対頂角 {性質}

対頂角は等しい。

\対頂角 {証明}

【証明】



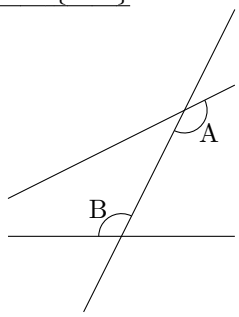
$$180^\circ = \angle A + \angle C$$

$$180^\circ = \angle B + \angle C$$

$$\Leftrightarrow \angle A = \angle B$$

(Q.E.D.)

\錯角 {定義}



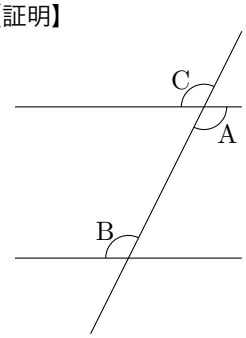
図において，∠A と ∠B を錯角という。

\錯角 {性質}

直線 l, m において，錯角が等しい $\Leftrightarrow$ 直線 l, m は平行

\錯角 {証明}

【証明】



1.「平行ならば錯角が等しい」の証明。

対頂角は等しいので，

$$\angle A = \angle C$$

ここで，∠B と ∠C は同位角なので等しいので，

$$\angle A = \angle B$$

2.「錯角が等しいならば平行」の証明。
錯角が等しいので，

$$\angle A = \angle B$$

対頂角は等しいので，

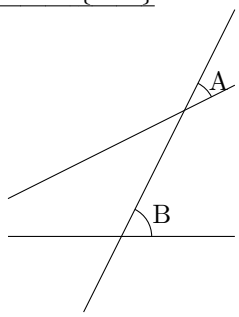
$$\angle A = \angle C$$

$$\Leftrightarrow \angle C = \angle B$$

即ち，同位角が等しいので二直線は平行。

(Q.E.D.)

\同位角 {定義}



図において，∠A と ∠B を同位角という。

\同位角 {公理}

直線 l, m において，同位角が等しい $\Leftrightarrow$ 直線 $l,\ m$ は平行。

\点の座標 {二点間の距離}[i]

A $(x_1,\ y_1)$, B $(x_2,\ y_2)$ として，線分 AB 間の距離は，$\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}$

\点の座標 {二点間の距離}[b]

A $(x_1,\ y_1)$, B $(x_2,\ y_2)$ として，線分 AB 間の距離は，

$$\sqrt{(x_2-x_1)^2-(y_2-y_1)^2}$$

\点の座標 {内分点の座標}[i]

A $(x_1,\ y_1)$, B $(x_2,\ y_2)$ として，線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は，$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{n+m},\ \dfrac{ny_1+my_2}{n+m}\right)$

\点の座標 {内分点の座標}[b]

A $(x_1,\ y_1)$, B $(x_2,\ y_2)$ として，線分 AB を $m:n$ に内分する点の座標は，

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{n+m},\ \frac{ny_1+my_2}{n+m}\right)$$

\点の座標 {内分点の座標の証明}

【証明】

$m:n$ に内分する点の座標を $\mathrm{P}\,(x,\ y)$ として，

$$m:n=x-x_1:x_2-x$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{nx_1+mx_2}{n+m},\ \frac{ny_1+my_2}{n+m}\right)$$

(Q.E.D.)

\点の座標 {外分点の座標}[i]

$\mathrm{A}\,(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}\,(x_2,\ y_2)$ として，線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は，$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$

\点の座標 {外分点の座標}[b]

$\mathrm{A}\,(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}\,(x_2,\ y_2)$ として，線分 AB を $m:n$ に外分する点の座標は，

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

\点の座標 {外分点の座標の証明}

【証明】

1. $m>n$ のとき

   $n:m$ に外分する点の座標を $\mathrm{P}\,(x,\ y)$ として，

   $$m:n=x-x_1:x-x_2$$
   $$\Leftrightarrow \left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

2. $m<n$ のとき

   $n:m$ に外分する点の座標を $\mathrm{P}\,(x,\ y)$ として，

   $$m:n=x-x_2:x-x_1$$
   $$\Leftrightarrow \left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

よって $m,\ n$ の大小によらず

$$\left(\frac{-nx_1+mx_2}{m-n},\ \frac{-ny_1+my_2}{m-n}\right)$$

となる。 (Q.E.D.)

\点の座標 {中点の座標}[i]

$\mathrm{A}\,(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}\,(x_2,\ y_2)$ として，線分 AB の中点は，$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$

\点の座標 {中点の座標}[b]

$\mathrm{A}\,(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}\,(x_2,\ y_2)$ として，線分 AB の中点は，

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

\点の座標 {中点の座標の証明}

【証明】

内分点の公式において $m=n$ のとき，

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2}\right)$$

(Q.E.D.)

\点の座標 {重心の座標}[i]

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ として，△ABC の重心の座標は，$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

\点の座標 {重心の座標}[b]

$A(x_1,\ y_1)$, $B(x_2,\ y_2)$, $C(x_3,\ y_3)$ として，△ABC の重心の座標は，

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

\点の座標 {重心の座標の証明}

【証明】

A と B の中点 M の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

重心は CM を $2:1$ に内分するので，重心の座標は内分点の公式より，

$$\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

(Q.E.D.)

\直線の方程式 {公式A}[i]

$ax+by+c=0$

\直線の方程式 {公式A}[b]

$$ax+by+c=0$$

\直線の方程式 {公式B}[i]

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り傾きが m の直線は，$y-y_1=m(x-x_1)$

\直線の方程式 {公式B}[b]

点 $(x_1,\ y_1)$ を通り傾きが m の直線は，

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

\直線の方程式 {公式C}[i]

異なる二点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線 $(x_1\neq x_2)$ は，$y-y_1=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$

\直線の方程式 {公式C}[b]

異なる二点 $(x_1,\ y_1)$, $(x_2,\ y_2)$ を通る直線，$(x_1\neq x_2)$ は，

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

\直線の方程式 {公式Bの証明}

【証明】

傾き m なので，$y=mx+a$ と置ける（a は切片）。

ここで，$(x_1,\ x_2)$ を通るので，$y_1=mx_1+a$ となり，連立することで

$$y-y_1=m(x-x_1)$$

を得る。 (Q.E.D.)

\二直線の関係 {公式A}[i]

二直線 $y = m_1x + n_1,\ y = m_2x + n_2$ が平行 $\Leftrightarrow m_1 = m_2$

\二直線の関係 {公式A}[b]

二直線 $y = m_1x + n_1,\ y = m_2x + n_2$ が平行

$$\Leftrightarrow m_1 = m_2$$

\二直線の関係 {公式B}[i]

二直線 $y = m_1x + n_1,\ y = m_2x + n_2$ が垂直 $\Leftrightarrow m_1m_2 = -1$

\二直線の関係 {公式B}[b]

二直線 $y = m_1x + n_1,\ y = m_2x + n_2$ が垂直

$$\Leftrightarrow m_1m_2 = -1$$

\二直線の関係 {公式Bの証明}

【証明】

$y = mx_1$ 上に点 $\mathrm{A}(1,\ m_1)$, $y = mx_2$ 上に $\mathrm{B}(-m_1,\ 1)$ をとる。

$\mathrm{H}(1,\ 0)$, $\mathrm{I}(0,\ 1)$ として，△OAH と △OBI は合同。よって，

$$m_1m_2 = -1$$

(Q.E.D.)

\点と直線の距離 {公式}[i]

点 $(x_1,\ y_2)$ と直線 $ax + bx + c = 0$ の距離は，$\dfrac{|\,ax_1 + by_2 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

\点と直線の距離 {公式}[b]

点 $(x_1,\ y_2)$ と直線 $ax + bx + c = 0$ の距離は，

$$\frac{|\,ax_1 + by_2 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

\点と直線の距離 {証明}

【証明】

全体を x 軸方向に $-x_1$, y 軸方向に $-y_1$ 平行移動するとき，直線 l は $a\,(x + x_1) + b\,(y + y_1) + c = 0$ となる。

また，直線 l に原点 O からおろした垂線との交点を H とする。ここで OH 間の距離を d と置くと，

1. $a \neq 0$ のとき

   直線 l の垂線の傾きは b の値によらず，$y = \dfrac{b}{a}$ となる。

   よって，H の座標は二式を連立することで得られ，

$$\left(\frac{-a\,(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2},\ \frac{-b\,(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow d = \sqrt{\left\{\left(\frac{-a\,(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}\right)^2 + \left\{\frac{-b\,(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}\right\}\right\}^2}$$

$$= \frac{|\,ax_1 + by_2 + c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. $a = 0$ のとき

直線 l は $y = -\dfrac{by_1 + c}{b}$ となるので,

$$d = \left| -\frac{by_1 + c}{b} \right|$$
$$= \frac{|\, by_1 + c \,|}{|\, b \,|}$$

これは，$\dfrac{|\, ax_1 + by_2 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ に $a = 0$ を代入したものである。

よって，いずれの場合も

$$\frac{|\, ax_1 + by_2 + c \,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

を得る。 (Q.E.D.)

\円の方程式 {公式}[i]

中心 $(a,\ b)$ で半径 r の円は，$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ と表す（通る 3 点がわかっている問題では，$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0\ \left(A^2 + B^2 - 4C > 0\right)$ と置くこともある)。

\円の方程式 {公式}[b]

中心 $(a,\ b)$ で半径 r の円は,

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

また，円は

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0\ \left(A^2 + B^2 - 4C > 0\right)$$

とも表せられる。

\円の方程式 {証明}

【証明】

円の中心を O, 円周上の任意の点を P $(x,\ y)$ として，三平方の定理より

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

(Q.E.D.)

\円と直線 {公式}[i]

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，$xx_1 + yy_1 = r^2$

\円と直線 {公式}[b]

円 $x^2 + y^2 = r^2$ 上の点 $(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は,

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

\円と直線 {証明}

【証明】

1. $x_0 \neq 0,\ y_0 \neq 0$ のとき
   $A\,(x_0,\ y_0)$ と置いて，OA の傾きは $\dfrac{y_0}{x_0}$ となる。接線の傾きはこれに垂直なので，$-\dfrac{x_0}{y_0}$ また接線は点 $(x_0,\ y_0)$ を通るので

$$y = -\frac{x_0}{y_0}\,(x - x_0) + y_0$$

   より，$(x_0,\ y_0)$ が $x^2 + y^2 = r^2$ 上に存在することに留意して，$x_0x + y_0y = r^2$ となる。
2. $x_0 \neq 0$ のとき
   $y_0 = \pm r$ より接線は $y = \pm r$（複号同順）
3. $y_0 = 0$ のとき
   $x_0 = \pm r$ より接線は $x = \pm r$（複号同順）

よって，接線の方程式は

$$xx_1 + yy_1 = r^2$$

（Q.E.D.）

\三角関数の相互関係 {公式A}[i]
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
\三角関数の相互関係 {公式A}[b]

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

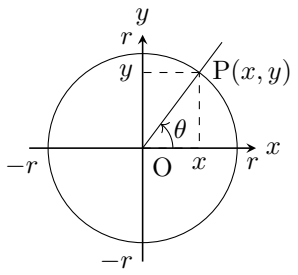
\三角関数の相互関係 {公式B}[i]
$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
\三角関数の相互関係 {公式B}[b]

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

\三角関数の相互関係 {公式C}[i]
$1 + \tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$
\三角関数の相互関係 {公式C}[b]

$$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

\三角関数の相互関係 {証明}
【証明】



図において，$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$,　$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$ より

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \frac{y^2 + x^2}{r^2}$$

ここで，三平方の定理より $x^2 + y^2 = r^2$ なので

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \dfrac{r^2}{r^2} = 1$

$\sin\theta = \dfrac{y}{r}$,　$\cos\theta = \dfrac{x}{r}$　$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$ より

$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \dfrac{y}{x} = \tan\theta$

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ の両辺を $\cos^2\theta$ で割ることで，

$$\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 1 = \frac{1}{\cos^2\theta}$$

ここで，$\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$ なので

$\tan^2\theta + 1 = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$　(Q.E.D.)

\三角関数の性質 {性質A}[i]

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

\三角関数の性質 {性質A}[b]

$$\sin(-\theta) = -\sin\theta$$

\三角関数の性質 {性質B}[i]

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

\三角関数の性質 {性質B}[b]

$$\cos(-\theta) = \cos\theta$$

\三角関数の性質 {性質C}[i]

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

\三角関数の性質 {性質C}[b]

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$

\三角関数の性質 {性質D}[i]
$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$
\三角関数の性質 {性質D}[b]

$$\sin(\theta+\pi) = -\sin\theta$$

\三角関数の性質 {性質E}[i]
$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$
\三角関数の性質 {性質E}[b]

$$\cos(\theta+\pi) = -\cos\theta$$

\三角関数の性質 {性質F}[i]
$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$
\三角関数の性質 {性質F}[b]

$$\tan(\theta+\pi) = \tan\theta$$

\三角関数の性質 {性質G}[i]
$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$
\三角関数の性質 {性質G}[b]

$$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$$

\三角関数の性質 {性質H}[i]
$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$
\三角関数の性質 {性質H}[b]

$$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$$

\三角関数の性質 {性質I}[i]
$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$
\三角関数の性質 {性質I}[b]

$$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$$

\三角関数の性質 {性質J}[i]
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$
\三角関数の性質 {性質J}[b]

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$$

\三角関数の性質 {性質K}[i]
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$
\三角関数の性質 {性質K}[b]

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$$

\三角関数の性質 {性質L}[i]
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$$
\三角関数の性質 {性質L}[b]

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$$

\三角関数の性質 {性質M}[i]
$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$
\三角関数の性質 {性質M}[b]

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$$

\三角関数の性質 {性質N}[i]
$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$$
\三角関数の性質 {性質N}[b]

$$\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$$

\三角関数の性質 {性質O}[i]
$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$
\三角関数の性質 {性質O}[b]

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\theta}$$

\三角関数の加法定理 {公式A}[i]

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$（複号同順）

\三角関数の加法定理 {公式A}[b]

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\text{（複号同順）}$$

\三角関数の加法定理 {公式B}[i]

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$（複号同順）

\三角関数の加法定理 {公式B}[b]

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

（複号同順）

\三角関数の加法定理 {公式C}[i]

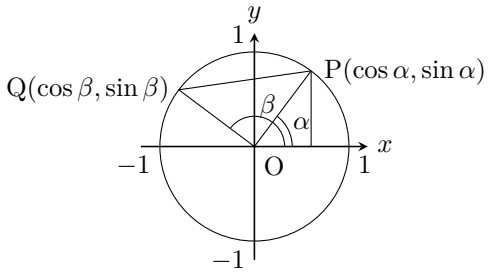
$\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$（複号同順）

\三角関数の加法定理 {公式C}[b]

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\text{（複号同順）}$$

\三角関数の加法定理 {証明}

【証明】



図において，三角関数の性質より $\cos(\beta-\alpha)=\cos(\alpha-\beta)$ なので，△QOP について余弦定理より

$$\mathrm{QP}^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos(\alpha-\beta)$$

また，QP 間の距離について三平方の定理を用いて

$$\mathrm{QP}^2=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

$$\Leftrightarrow 2-2\cos(\alpha-\beta)=(\cos\beta-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2$$

両辺整理して，

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

を得る。
また，$\sin -\theta=-\sin\theta$ より，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

において，α を $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ にすることで，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

ここで，β を $-\beta$ にすることで，

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より，

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta}\ (\text{複号同順})$$

両辺を $\cos\alpha\cos\beta$ でわることで，

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}\ (\text{複号同順})$$

を得る。 (Q.E.D.)

\三角関数の二倍角の公式 {公式A}[i]

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\beta$

\三角関数の二倍角の公式 {公式A}[b]

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\beta$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式B}[i]

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

\三角関数の二倍角の公式 {公式B}[b]

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式C}[i]

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

\三角関数の二倍角の公式 {公式C}[b]

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式D}[i]

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

\三角関数の二倍角の公式 {公式D}[b]

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

\三角関数の二倍角の公式 {公式E}[i]

$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

\三角関数の二倍角の公式 {公式E}[b]

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

\三角関数の二倍角の公式 {証明}

【証明】

三角関数の加法定理 $\left\{ \begin{array}{c} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\ \tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} \end{array} \right\}$ において，$\alpha = \beta = \theta$ として，

$$\left\{ \begin{array}{c} \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \\ \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ \tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \end{array} \right\}$$ を得る。

また，$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$ において，三角関数の相互関係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を用いて，

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\Leftrightarrow \cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

を得る。 (Q.E.D.)

\三角関数の三倍角の公式 {公式A}[i]

$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$

\三角関数の三倍角の公式 {公式A}[b]

$$\sin 3\alpha = -4\sin^3\alpha + 3\sin\alpha$$

\三角関数の三倍角の公式 {公式B}[i]

$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$

\三角関数の三倍角の公式 {公式B}[b]

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

\三角関数の三倍角の公式 {証明}

【証明】

三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

において，$\alpha = \theta,\ \beta = 2\theta$ のとき，

$$\sin 3\theta = \sin\theta\cos 2\theta + \cos\theta\sin 2\theta$$
$$\cos 3\theta = \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$$

二倍角の公式と三角関数の相互関係より，

$$\begin{aligned}\sin 3\theta &= \sin\theta\left(1-2\sin^2\theta\right) + 2\sin\theta\cos^2\theta\\ &= \sin\theta - 2\sin^3\theta + 2\sin\theta\left(1-\sin^2\theta\right)\\ &= -4\sin^3\theta + 3\sin\theta\\ \cos 3\theta &= \cos\theta\left(2\cos^2\theta - 1\right) - 2\sin^2\theta\cos\theta\\ &= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\left(1-\cos^2\theta\right)\cos\theta\\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\三角関数の積和公式 {公式A}[i]

$\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$

\三角関数の積和公式 {公式A}[b]

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {公式B}[i]

$\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$

\三角関数の積和公式 {公式B}[b]

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {公式C}[i]

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {公式C}[b]

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{2}$$

\三角関数の積和公式 {証明}

【証明】

三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ①$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ②$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ③$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta \quad \cdots\cdots ④$$

より，① + ② から

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

③ + ④ から

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

④ − ③ から

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

(Q.E.D.)

\三角関数の和積公式 {公式A}[i]

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式A}[b]

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式B}[i]

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式B}[b]

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式C}[i]

$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

\三角関数の和積公式 {公式C}[b]

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {公式D}[i]

$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

\三角関数の和積公式 {公式D}[b]

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

\三角関数の和積公式 {証明}

【証明】

三角関数の積和の公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\}$$

において，$\alpha+\beta=A,\ \alpha-\beta=B$ と置くことで，$\alpha=\dfrac{A+B}{2},\ \beta=\dfrac{A-B}{2}$ となるので，

$$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$$

$$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$$

(Q.E.D.)

となる。

\三角関数の合成 {公式}[i]

$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{ただし，}\ \sin\alpha=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$

\三角関数の合成 {公式}[b]

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)\ \left(\text{ただし，}\ \sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

\三角関数の合成 {証明}

【証明】

三角関数の加法定理

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ について,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\alpha,\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\alpha$$

とすることで,

$$a\sin\theta+b\cos\theta=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$$

となる。 (Q.E.D.)

\有理数の指数 {公式A}[i]

$a>0$ また $m,\ n$ が正の整数，r が正の有理数のとき，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$

\有理数の指数 {公式A}[b]

$a>0$ また $m,\ n$ が正の整数，r が正の有理数のとき,

\有理数の指数 {公式B}[i]

$a>0$ また n が正の整数のとき，$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$

\有理数の指数 {公式B}[b]

$a>0$ また n が正の整数のとき,

$$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$$

\有理数の指数 {公式C}[i]

$a>0$，r が正の有理数のとき，$a^{-r}=\dfrac{1}{a^r}$

\有理数の指数 {公式C}[b]

$a>0$，r が正の有理数のとき,

$$a^{-r}=\frac{1}{a^r}$$

\指数法則 {公式A}[i]

$a>0$ また，$r,\ s$ は有理数のとき，$a^ra^s=a^{r+s}$

\指数法則 {公式A}[b]

$a>0$ また，$r,\ s$ は有理数のとき,

$$a^ra^s=a^{r+s}$$

\指数法則 {公式B}[i]

$a>0$ また，$r,\ s$ は有理数のとき，$(a^r)^s=a^{rs}$

\指数法則 {公式B}[b]

$a>0$ また，$r,\ s$ は有理数のとき,

$$(a^r)^s=a^{rs}$$

\指数法則 {公式C}[i]

$a>0,\ b>0$ また，r は有理数のとき，$(ab)^r=a^rb^r$

\指数法則 {公式C}[b]

$a>0,\ b>0$ また，r は有理数のとき，

$$(ab)^r = a^r b^r$$

\指数法則 {公式D}[i]

$a>0$ また，$r,\ s$ は有理数のとき，$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

\指数法則 {公式D}[b]

$a>0$ また，$r,\ s$ は有理数のとき，

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

\指数法則 {公式E}[i]

$a>0,\ b>0$ また，r は有理数のとき，$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

\指数法則 {公式E}[b]

$a>0,\ b>0$ また，r は有理数のとき，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

\対数の定義 {定義}[i]

$a>0,\ b>0$ で，$r,\ s$ は有理数とすると，$\left\{\begin{array}{l} a^p = M \text{ ならば，} \log_a M \\ \log_a M \log_a M \text{ ならば，} a^p = M \end{array}\right\}$

\対数の定義 {定義}[b]

$a>0,\ b>0$ で，$r,\ s$ は有理数とすると，

$$a^p = M \Rightarrow \log_a M,\ \log_a M \Rightarrow a^p = M$$

\対数の性質 {公式A}[i]

$a>0,\ a\neq 1$ とするとき，$\log_a a = 1$

\対数の性質 {公式A}[b]

$a>0,\ a\neq 1$ とするとき，

$$\log_a a = 1$$

\対数の性質 {公式B}[i]

$a>0,\ a\neq 1$ とするとき，$\log_a 1 = 0$

\対数の性質 {公式B}[b]

$a>0,\ a\neq 1$ とするとき，

$$\log_a 1 = 0$$

\対数の性質 {公式C}[i]

$a>0,\ a\neq 1$ とするとき，$\log_a \dfrac{1}{a} = -1$

\対数の性質 {公式C}[b]

$a>0,\ a\neq 1$ とするとき，

$$\log_a \frac{1}{a} = -1$$

\対数の性質 {公式D}[i]

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$ とするとき，$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$

\対数の性質 {公式D}[b]

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$ とするとき，

$$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

\対数の性質 {公式E}[i]

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$ とするとき，$\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$

\対数の性質 {公式E}[b]

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$ とするとき，

$$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

\対数の性質 {公式F}[i]

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$ とするとき，$\log_a M^k=k\log_a M$

\対数の性質 {公式F}[b]

$a>0,\ a\neq 1,\ M>0,\ N>0$ とするとき，

$$\log_a M^k=k\log_a M$$

\対数の性質 {証明}

【証明】

$p=\log_a M,\ q=\log_a N$ として，$MN=a^pa^q$ から，指数法則より

$$MN=a^{p+q}$$

また，対数の定義より

$$\log_a MN=p+q$$

$$\Leftrightarrow \log_a MN=\log_a M+\log_a N$$

$p=\log_a M,\ q=\log_a N$ として，

$$\frac{M}{N}=\frac{a^p}{a^q}$$

指数法則より

$$\frac{M}{N}=a^{p-q}$$

ここで，対数の定義より

$$\log_a \frac{M}{N}=p-q$$

$$\Leftrightarrow \log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$$

$p=\log_a M$ として，$a^p=M$ より両辺 k 乗して

$$a^{pk}=M^k$$

対数を取ると

$$pk = \log_a M^k$$

$p = \log_a M$ より，

$$\log_a M^k = k \log_a M$$

(Q.E.D.)

\底の変換公式 {公式}[i]

$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1$ のとき，$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

\底の変換公式 {公式}[b]

$a,\ b,\ c$ は正の実数で，$a \neq 1,\ b \neq 1,\ c \neq 1$ のとき，

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

\底の変換公式 {証明}

【証明】

対数の定義より $a^{\log_a b} = b$ が成立。

底が c の対数を取ると，

$$\log_c a^{\log_a b} = \log_c b$$

対数の性質より，

$$\log_a b \log_c a = \log_c b$$

よって，

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

(Q.E.D.)

\導関数の定義 {定義}[i]

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

\導関数の定義 {定義}[b]

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {公式A}[i]

$(x^n)' = nx^{n-1}$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {公式A}[b]

$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {公式B}[i]

$(c)' = 0$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {公式B}[b]

$$(c)' = 0$$

\べき乗関数と定数関数の導関数 {証明}

【証明】

導関数の定義より，

$$(x^n)' = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

二項定理より，

$$\begin{aligned}
(x^n)' &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{{}_n\mathrm{C}_0 x^n + {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1}h + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h^2 + \cdots {}_n\mathrm{C}_{n-1} x h^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_n h^n - x^n}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left({}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2}h + \cdots + {}_n\mathrm{C}_{n-1} x h^{n-2} + {}_n\mathrm{C}_n h^{n-1}\right) \\
&= \lim_{h \to 0} \left\{{}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} + \left({}_n\mathrm{C}_2 x^{n-2} + \cdots {}_n\mathrm{C}_{n-1} x h^{n-3} + {}_n\mathrm{C}_n h^{n-2}\right) h\right\} \\
&= {}_n\mathrm{C}_1 x^{n-1} \\
&= nx^{n-1}
\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\導関数の性質 {公式A}[i]

$kf(x)' = kf'(x)$

\導関数の性質 {公式A}[b]

$$kf(x)' = kf'(x)$$

\導関数の性質 {公式B}[i]

$f(x) \pm g(x)' = f'(x) \pm g'(x)$

\導関数の性質 {公式B}[b]

$$f(x) \pm g(x)' = f'(x) \pm g'(x)$$

\導関数の性質 {公式C}[i]

$kf(x) + lg(x)' = kf'(x) + lg'(x)$

\導関数の性質 {公式C}[b]

$$kf(x)+lg(x)'=kf'(x)+lg'(x)$$

\接線の方程式 {公式}[i]

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における曲線の接線の方程式は，$y-f(a)=f'(x)(x-a)$

\接線の方程式 {公式}[b]

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における曲線の接線の方程式は，

$$y-f(a)=f'(x)(x-a)$$

\不定積分の定義 {定義}[i]

$F'(x)=f(x)$ のとき，$\int f(x)\,dx=F(x)+C$（C は積分定数）

\不定積分の定義 {定義}[b]

$F'(x)=f(x)$ のとき，

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C\text{（}C\text{ は積分定数）}$$

\不定積分の性質 {公式A}[i]

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$$

\不定積分の性質 {公式A}[b]

$$\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$$

\不定積分の性質 {公式B}[i]

$$\int f(x)\pm g(x)dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx\text{（複号同順）}$$

\不定積分の性質 {公式B}[b]

$$\int f(x)\pm g(x)dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx\text{（複号同順）}$$

\不定積分の性質 {公式C}[i]

$$\int kf(x)+lg(x)dx=k\int f(x)\,dx+l\int g(x)$$

\不定積分の性質 {公式C}[b]

$$\int kf(x)+lg(x)dx=k\int f(x)\,dx+l\int g(x)$$

1

$$]\int kf(x)\,dx=k\int f(x)\,dx$$

$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

1]

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$$

1]$\int f(x) \pm g(x)d$

$\int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$（複号同順）

$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$（複号同順）

1]

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$（複号同順）

$$\int f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$（複号同順）

1]$\int kf(x) + lg(x$

$k\int f(x)\,dx + l\int g(x)$

$\int kf(x) + lg(x)dx = k\int f(x)\,dx + l\int g(x)$

1]

$$\int kf(x) + lg(x)dx = k\int f(x)\,dx + l\int g(x)$$

$$\int kf(x) + lg(x)dx = k\int f(x)\,dx + l\int g(x)$$

\定積分の定義 {定義}[i]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸（区間は a から b）に囲まれた部分の面積 S について，$F'(x) = f(x)$ のとき，
$S = \int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

\定積分の定義 {定義}[b]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸（区間は a から b）に囲まれた部分の面積 S について，$F'(x) = f(x)$ のとき，

$$S = \int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

\定積分の性質 {公式A}[i]

$$\int_b^a kf\left(x\right)dx = k\int_b^a f\left(x\right)dx$$

\定積分の性質 {公式A}[b]

$$\int_b^a kf\left(x\right)dx = k\int_b^a f\left(x\right)dx$$

\定積分の性質 {公式B}[i]

$$\int_b^a f\left(x\right) \pm g\left(x\right)dx = \int_b^a f\left(x\right)dx \pm \int_b^a g\left(x\right)dx$$

\定積分の性質 {公式B}[b]

$$\int_b^a f\left(x\right) \pm g\left(x\right)dx = \int_b^a f\left(x\right)dx \pm \int_b^a g\left(x\right)dx$$

\定積分の性質 {公式C}[i]

$$\int_a^a f\left(x\right)dx = 0$$

\定積分の性質 {公式C}[b]

$$\int_a^a f\left(x\right)dx = 0$$

\定積分の性質 {公式D}[i]

$$\int_b^a f\left(x\right)dx = -\int_a^b f\left(x\right)dx$$

\定積分の性質 {公式D}[b]

$$\int_b^a f\left(x\right)dx = -\int_a^b f\left(x\right)dx$$

\定積分の性質 {公式E}[i]

$$\int_b^a f\left(x\right)dx = \int_a^c f\left(x\right)dx + \int_c^b f\left(x\right)dx$$

\定積分の性質 {公式E}[b]

$$\int_b^a f\left(x\right)dx = \int_a^c f\left(x\right)dx + \int_c^b f\left(x\right)dx$$

\ベクトルの演算 {公式A}[i]

$k,\ l$ が実数のとき，$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$

\ベクトルの演算 {公式A}[b]

$k,\ l$ が実数のとき

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$$

\ベクトルの演算 {公式B}[i]

$k,\ l$ が実数のとき，$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

\ベクトルの演算 {公式B}[b]

$k,\ l$ が実数のとき

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$$

\ベクトルの演算 {公式C}[i]

$\vec{a}+\left(a\,\vec{a}\right)=\vec{0}$

\ベクトルの演算 {公式C}[b]

$$\vec{a}+\left(a\,\vec{a}\right)=\vec{0}$$

\ベクトルの演算 {公式D}[i]

$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$

\ベクトルの演算 {公式D}[b]

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$$

\ベクトルの演算 {公式E}[i]

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$

\ベクトルの演算 {公式E}[b]

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$$

\ベクトルの演算 {公式F}[i]

$k,\ l$ が実数のとき，$k\left(l\,\vec{a}\right)=l\left(k\,\vec{b}\right)$

\ベクトルの演算 {公式F}[b]

$k,\ l$ が実数のとき

$$k\left(l\,\vec{a}\right)=l\left(k\,\vec{b}\right)$$

\ベクトルの演算 {公式G}[i]

$k,\ l$ が実数のとき，$(k+l)\,\vec{a}=k\,\vec{a}+l\,\vec{a}$

\ベクトルの演算 {公式G}[b]

$k,\ l$ が実数のとき

$$(k+l)\,\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$$

\ベクトルの演算 {公式H}[i]
k が実数のとき，$k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$
\ベクトルの演算 {公式H}[b]
k が実数のとき

$$k\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$$

\ベクトルの演算 {公式I}[i]
$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$
\ベクトルの演算 {公式I}[b]

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

\ベクトルの演算 {公式J}[i]
$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$
\ベクトルの演算 {公式J}[b]

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{BA}}$$

\ベクトルの演算 {公式K}[i]
$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$
\ベクトルの演算 {公式K}[b]

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$$

\ベクトルの演算 {公式L}[i]
$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$
\ベクトルの演算 {公式L}[b]

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

\平面ベクトルの分解 {公式}[i]
$\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，任意の $\vec{p}$ はただ一通りに，$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$ の形に表せられる。
\平面ベクトルの分解 {公式}[b]

$\vec{a} \neq 0,\ \vec{b} \neq 0$ で，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が平行でないとき，任意の $\vec{p}$ はただ一通りに，

$$\vec{p} = s\vec{a} + t\vec{b}$$

の形に表せられる。

\平面ベクトルの成分 {公式A}[i]

$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ とすると，$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$

\平面ベクトルの成分 {公式A}[b]

$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ とすると，

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1,\ a_2 = b_2$$

\平面ベクトルの成分 {公式B}[i]

$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ とすると，$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$

\平面ベクトルの成分 {公式B}[b]

$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ とすると，

$$a_1 = b_1,\ a_2 = b_2 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{b}$$

\平面ベクトルの成分 {公式C}[i]

$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ とすると，$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

\平面ベクトルの成分 {公式C}[b]

$\vec{a} = (a_1,\ a_2)$ とすると，

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

\平面ベクトルの成分 {公式D}[i]

$k,\ l$ を実数，$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ として，

$$k\vec{a} + l\vec{b} = k\,(a_1,\ a_2) + l\,(b_1,\ b_2) = (ka_1 + lb_1,\ ka_2 + lb_2)$$

\平面ベクトルの成分 {公式D}[b]

$k,\ l$ を実数，$\vec{a} = (a_1,\ a_2),\ \vec{b} = (b_1,\ b_2)$ として，

$$k\vec{a} + l\vec{b} = k\,(a_1,\ a_2) + l\,(b_1,\ b_2) = (ka_1 + lb_1,\ ka_2 + lb_2)$$

\ベクトルの成分と大きさ {公式A}[i]

$A\,(a_1,\ a_2),\ B\,(b_1,\ b_2)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$

\ベクトルの成分と大きさ {公式A}[b]

$A\,(a_1,\ a_2),\ B\,(b_1,\ b_2)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (b_1 - a_1,\ b_2 - a_2)$$

\ベクトルの成分と大きさ {公式B}[i]

$A\,(a_1,\ a_2),\ B\,(b_1,\ b_2)$ とすると，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$

\ベクトルの成分と大きさ {公式B}[b]

$A(a_1,\ a_2)$, $B(b_1,\ b_2)$ とすると，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

\ベクトルの成分と大きさ {証明}

【証明】

三平方の定理より，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

(Q.E.D.)

\平面ベクトルの内積 {公式}[i]

ベクトルの内積は，$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\,(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$（ただし，$\theta$ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角）

\平面ベクトルの内積 {公式}[b]

ベクトルの内積は，

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\,(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$$（ただし，θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角）

\内積の性質 {公式A}[i]

$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$

\内積の性質 {公式A}[b]

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$

\内積の性質 {公式B}[i]

$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

\内積の性質 {公式B}[b]

$$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

\内積の性質 {公式C}[i]

$\vec{c}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

\内積の性質 {公式C}[b]

$$\vec{c}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$$

\内積の性質 {公式D}[i]

k が実数のとき，$\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right) = k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$

\内積の性質 {公式D}[b]

k が実数のとき，

$$\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right)=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

\内積の性質 {公式E}[i]
$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$
\内積の性質 {公式E}[b]

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2$$

\内積の性質 {公式F}[i]
$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$
\内積の性質 {公式F}[b]

$$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$$

\平面ベクトルの平行条件 {条件}[i]
$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ k\in\mathbb{R}$ として，$\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=k\vec{a}$
\平面ベクトルの平行条件 {条件}[b]
$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ k\in\mathbb{R}$ として，

$$\vec{a}\ /\!/\ \vec{b}\Leftrightarrow\vec{b}=k\vec{a}$$

\平面ベクトルの垂直条件 {条件}[i]
$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ k\in\mathbb{R}$ とすると，$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
\平面ベクトルの垂直条件 {条件}[b]
$\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0},\ k\in\mathbb{R}$ とすると，

$$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

\位置ベクトル {公式A}[i]
$A\left(\vec{a}\right),\ B\left(\vec{b}\right)$ とすると，線分 AB を $m:n$ に内分する点は，$\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$
\位置ベクトル {公式A}[b]
$A\left(\vec{a}\right),\ B\left(\vec{b}\right)$ とすると，線分 AB を $m:n$ に内分する点は，

$$\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$$

\位置ベクトル {公式A}[i]
【証明】

$P\left(\vec{p}\right)$ が $A\left(\vec{a}\right)$, $B\left(\vec{b}\right)$ を $m:n$ に内分するとき,

$$\begin{aligned}\vec{p} &= \vec{a} + \frac{m}{m+n}\left(\vec{b} - \vec{a}\right) \\ &= \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\位置ベクトル {公式B}[i]

$A\left(\vec{a}\right)$, $B\left(\vec{b}\right)$ とすると，線分 AB を $m:n$ に外分する点は，$\dfrac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$

\位置ベクトル {公式B}[b]

$A\left(\vec{a}\right)$, $B\left(\vec{b}\right)$ とすると，線分 AB を $m:n$ に外分する点は,

$$\frac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$$

\位置ベクトル {外分点の位置ベクトルの証明}

【証明】

$m:n$ に外分ということは $m:(-n)$ に内分ということなので，$\dfrac{-n\vec{a} + m\vec{b}}{m-n}$ (Q.E.D.)

\位置ベクトル {公式C}[i]

$A\left(\vec{a}\right)$, $B\left(\vec{b}\right)$ とすると，線分 AB の中点は，$\dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$

\位置ベクトル {公式C}[b]

$A\left(\vec{a}\right)$, $B\left(\vec{b}\right)$ とすると，線分 AB の中点は,

$$\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$$

\位置ベクトル {公式D}[i]

$A\left(\vec{a}\right)$, $B\left(\vec{b}\right)$, $C\left(\vec{c}\right)$ とすると，△ABC の重心は，$\dfrac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$

\位置ベクトル {公式D}[b]

$A\left(\vec{a}\right)$, $B\left(\vec{b}\right)$, $C\left(\vec{c}\right)$ とすると，△ABC の重心は,

$$\frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}$$

\ベクトル方程式 {公式A}[i]

s, t を実数とする。点 $A\left(\vec{a}\right)$ をとおり，$\vec{d}$ に平行な直線は，$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$

\ベクトル方程式 {公式A}[b]

s, t を実数とする。点 $A\left(\vec{a}\right)$ をとおり，$\vec{d}$ に平行な直線は,

$$\vec{p} = \vec{a} + t\vec{b}$$

\ベクトル方程式 {公式B}[i]

s, t を実数とする。二点 $A\left(\vec{a}\right)$, $B\left(\vec{b}\right)$ を通る直線は,

$\vec{p} = (1-t)\,\vec{a} + t\,\vec{b},\ \vec{p} = a\,\vec{a} + t\,\vec{b}$（ただし，$s+t=1$）

\ベクトル方程式 {公式B}[b]

$s,\ t$ を実数とする。二点 $A\left(\vec{a}\right),\ B\left(\vec{b}\right)$ を通る直線は，

$$\vec{p} = (1-t)\,\vec{a} + t\,\vec{b},\ \vec{p} = a\,\vec{a} + t\,\vec{b}$$（ただし，$s+t=1$）

\ベクトル方程式 {公式C}[i]

点 $A\left(\vec{a}\right)$ を通り，$\vec{n}$ に垂直な直線 $\vec{p}$ について，$\vec{n}\cdot\left(\vec{p}-\vec{a}\right)=0$

\ベクトル方程式 {公式C}[b]

点 $A\left(\vec{a}\right)$ を通り，$\vec{n}$ に垂直な直線 $\vec{p}$ について，

$$\vec{n}\cdot\left(\vec{p}-\vec{a}\right)=0$$

\ベクトル方程式 {公式D}[i]

中心 $C\left(\vec{c}\right)$，半径 r の円は，$\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=r,\ \left(\vec{p}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{c}\right)=r^2$

\ベクトル方程式 {公式D}[b]

中心 $C\left(\vec{c}\right)$，半径 r の円は，

$$\left|\vec{p}-\vec{c}\right|=r$$

$$\left(\vec{p}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{p}-\vec{c}\right)=r^2$$

\等差数列 {一般項}[i]

初項 a_1，公差 d のとき，$a_n = a_1 + (n-1)\,d$

\等差数列 {一般項}[b]

初項 a_1，公差 d のとき，

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

\等差数列 {総和}[i]

$S_n = \dfrac{n\,(a_1+a_n)}{2}$

\等差数列 {総和}[b]

$$S_n = \frac{n\,(a_1+a_n)}{2}$$

\等差数列 {証明}

【証明】

$$S_n = a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d) + \cdots + \{a_1+(n-1)\,d\}$$

$$S_n = \{a_1+(n-1)\,d\} + \cdots + a_1 + (a_1+d) + (a_1+2d)$$

連立して，$2S = (a_1+a_n)\,n$ より，

$S_n = \dfrac{n\,(a_1 + a_n)}{2}$ (Q.E.D.)

\等比数列 {一般項}[i]

$a_n = ar^{n-1}$

\等比数列 {一般項}[b]

$$a_n = ar^{n-1}$$

\等比数列 {総和}[i]

$r \neq 1$ のとき，$S_n = \dfrac{a_1\,(1 - r^n)}{1 - r}$ もしくは，$\dfrac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$

$r = 1$ のとき，$S_n = na_1$

\等比数列 {総和}[b]

$r \neq 1$ のとき，

$$S_n = \frac{a_1\,(1 - r^n)}{1 - r}$$

もしくは，

$$S_n = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

$r = 1$ のとき，

$$S_n = na_1$$

\等比数列 {証明}

【証明】

$$S_n = a_1 + ra_1 + r^2a_1 + \cdots + r^{n-1}a_1$$
$$S_nr = ra_1 + r^2a_2 + r^3a_1 + \cdots + r^n$$

連立することで，$S\,(1 - r) = a_1 - r^na_1$ となる。

よって，

$$S = \frac{a_1\,(1 - r^n)}{1 - r}$$

また，$\dfrac{-1}{-1}$ をかけることで，

$$S = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

以上より，

$$S = \frac{a_1\,(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a_1\,(r^n - 1)}{r - 1}$$

(Q.E.D.)

\シグマの公式 {公式A}[i]

c は k に無関係なとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = nc$

\シグマの公式 {公式A}[b]

c は k に無関係なとき，

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc$$

\シグマの公式 {公式B}[i]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n\,(n+1)$

\シグマの公式 {公式B}[b]

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2} n\,(n+1)$$

\シグマの公式 {公式C}[i]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1)$

\シグマの公式 {公式C}[b]

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n\,(n+1)\,(2n+1)$$

\シグマの公式 {公式D}[i]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n\,(n+1) \right\}^2$

\シグマの公式 {公式D}[b]

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left\{ \frac{1}{2} n\,(n+1) \right\}^2$$

\シグマの公式 {公式E}[i]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1}$

\シグマの公式 {公式E}[b]

$$\sum_{k=1}^{n} r^{k-1} = \frac{(1-r^n)}{1-r} = \frac{r^n-1}{r-1}$$

\シグマの公式 {証明}

【証明】

$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ を用いる。

$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ の k に 1 から n までの自然数を代入したものを足したものは,

$$(n+1)^3 - 1 = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1) + n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

となる。 (Q.E.D.)

\シグマの性質 {性質}[i]

$p,\ q$ が k に無関係な定数のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(pa_k + qb_k) = p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} a_k$

\シグマの性質 {性質}[b]

$p,\ q$ が k に無関係な定数のとき,

$$\sum_{k=1}^{n}(pa_k + qb_k) = p\sum_{k=1}^{n} a_k + q\sum_{k=1}^{n} a_k$$

\階差数列 {一般項}[i]

数列 a_n の階差数列を b_n とすると，$2 \leqq n$ のとき，$\displaystyle a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$

\階差数列 {一般項}[b]

数列 a_n の階差数列を b_n とすると，$2 \leqq n$ のとき,

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

\漸化式 {等差型}[i]

$a_{n+1} = a_n + d$ のとき，$a_n = a_1 + (n-1)d$

\漸化式 {等差型}[b]

$a_{n+1} = a_n + d$ のとき,

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

\漸化式 {等比型}[i]

$a_{n+1} = ra_n$ のとき，$a_n = a_1 r^{n-1}$

\漸化式 {等比型}[b]

$a_{n+1} = ra_n$ のとき,

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

\漸化式 {階差型}[i]

$a_{n+1} - a_n = f(n)$ のとき，$\displaystyle a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$（ただし，$n \geqq 2$）

\漸化式 {階差型}[b]

$a_{n+1}-a_n=f(n)$ のとき，

$$a_1+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)\ (\text{ただし，}n\geqq 2)$$

\漸化式 {特性方程式}[i]

$a_{n+1}=pa_n+q\,(p\neq 0,\ q\neq 0)$ のとき，$a_{n+1}-c=p(a_n-c)$ と変形して等差型に（ただし，$c=pc+q$ を満たす)。

\漸化式 {特性方程式}[b]

$a_{n+1}=pa_n+q\,(p\neq 0,\ q\neq 0)$ のとき，

$$a_{n+1}-c=p(a_n-c)$$

と変形して等差型に（ただし，$c=pc+q$ を満たす)。

\数学的帰納法

自然数 n に関する命題 P が全ての自然数 n について成立することを証明するには，$n=1$ のときに P が成立することと，$n=k$ のときに P が成立するという仮定のもと，$n=k+1$ が成立することを証明する。

\共役複素数 {定義}[i]

$\alpha=a+bi$ のとき，共役な複素数 $\overline{\alpha}$ は $a-bi$

\共役複素数 {定義}[b]

$\alpha=a+bi$ のとき，共役な複素数 $\overline{\alpha}$ は

$$a-bi$$

\共役複素数 {性質A}[i]

z が実数かつ，$\overline{z}=z$ ならば，z が実数。

\共役複素数 {性質A}[b]

z が実数かつ，$\overline{z}=z$ ならば，z が実数。

\共役複素数 {性質B}[i]

z が純虚数ならば，$\overline{z}=-z,\ z\neq 0$

\共役複素数 {性質B}[b]

z が純虚数ならば，

$$\overline{z}=-z,\ z\neq 0$$

\共役複素数 {性質C}[i]

$\overline{z}=-z,\ z\neq 0$ ならば，z が純虚数。

\共役複素数 {性質C}[b]

$$\overline{z}=-z,\ z\neq 0$$

ならば，z が純虚数。

\共役複素数 {性質D}[i]

$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$

\共役複素数 {性質D}[b]

$$\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$$

\共役複素数 {性質E}[i]
$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$
\共役複素数 {性質E}[b]

$$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}$$

\共役複素数 {性質F}[i]
$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha\beta}$
\共役複素数 {性質F}[b]

$$\overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha\beta}$$

\共役複素数 {性質G}[i]
$\overline{\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)}=\dfrac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$
\共役複素数 {性質G}[b]

$$\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}$$

\共役複素数 {証明}
【証明】
$\alpha=a+bi,\ \beta=c+di\quad(a,\ bc,\ d$ は実数かつ $a\neq 0,\ c\neq 0)$ として，

$$\begin{aligned}\overline{\alpha+\beta}&=\overline{(a+c)+(b+d)\,i}\\&=(a+c)-(b+d)\,i\\&=(a-ci)+(b-di)\\&=\overline{\alpha}+\overline{\beta}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{\alpha\beta}&=\overline{(a+bi)\,(c+di)}\\&=\overline{(ac-bd)+(ad+bc)\,i}\\&=(ac-bd)-(ad+bc)\,i\\&=(a-bi)\,(c-di)\\&=\overline{\alpha\beta}\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\複素数の絶対値 {定義}[i]

複素数 $z=a+bi$ に対して，$|\,z\,|=|\,a+bi\,|=\sqrt{a^2+b^2}$

\複素数の絶対値 {定義}[b]

複素数 $z=a+bi$ に対して，

$$|\,z\,|=|\,a+bi\,|=\sqrt{a^2+b^2}$$

\複素数の絶対値 {性質A}[i]

$|\,z\,|=\left|\overline{z}\right|=|\,-z\,|$

\複素数の絶対値 {性質A}[b]

$$|\,z\,|=\left|\overline{z}\right|=|\,-z\,|$$

\複素数の絶対値 {性質B}[i]

$z\overline{z}=\left|\,z^2\,\right|$

\複素数の絶対値 {性質B}[b]

$$z\overline{z}=\left|\,z^2\,\right|$$

\極形式 {定義}[i]

複素数 $\alpha=a+bi$ について，$\alpha=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)$（ただし $z>0$）また，$r=|\,\alpha\,|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ を極形式という。

\極形式 {定義}[b]

複素数 $\alpha=a+bi$ について，

$$\alpha=r\,(\cos\theta+i\sin\theta)\text{（ただし }z>0\text{）}$$

また，$r=|\,\alpha\,|=\sqrt{a^2+b^2}$，$\cos\theta=\dfrac{a}{r}$，$\sin\theta=\dfrac{b}{r}$ を極形式という。

\極形式 {性質A}[i]

α，β，γ を複素数とする。$\alpha=r_1\,(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2\,(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$\alpha\beta=r_1r_2\,\{\cos\,(\theta_1+\theta_2)+i\sin\,(\theta_1+\theta_2)\}$

\極形式 {性質A}[b]

α，β，γ を複素数とする。$\alpha=r_1\,(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2\,(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$$\alpha\beta=r_1r_2\,\{\cos\,(\theta_1+\theta_2)+i\sin\,(\theta_1+\theta_2)\}$$

\極形式 {性質B}[i]

α，β，γ を複素数とする。$\alpha=r_1\,(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$\beta=r_2\,(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ のとき，

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{r_1}{r_2}\,\{\cos\,(\theta_1+\theta_2)+i\sin\,(\theta_1+\theta_2)\}$

\極形式 {性質B}[b]

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする。$\alpha = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right),\ \beta = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ のとき，

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_1}{r_2}\left\{\cos\left(\theta_1+\theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right\}$$

\偏角 {定義}[i]

複素数 $\alpha = a + bi$ について，$\alpha = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$

ただし $z > 0$ のとき θ を偏角といい，augα で表す。

\偏角 {定義}[b]

複素数 $\alpha = a + bi$ について，

$$\alpha = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)$$

ただし $z > 0$ のとき θ を偏角といい，

$$\mathrm{aug}\alpha$$

で表す。

\偏角 {性質A}[i]

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする。$\alpha = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right),\ \beta = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ のとき，$\theta_1 = \arg\alpha$ また，$\arg\alpha = \theta_1 + 2n\pi$ (n は整数)

\偏角 {性質A}[b]

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする。$\alpha = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right),\ \beta = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ のとき，

$$\theta_1 = \theta_1 + 2n\pi = \arg\alpha$$

(n は整数)

\偏角 {性質B}[i]

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする。$\alpha = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right),\ \beta = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ のとき，$\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$

\偏角 {性質B}[b]

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする。$\alpha = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right),\ \beta = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ のとき，

$$\arg z_1z_2 = \arg z_1 + \arg z_2$$

\偏角 {性質C}[i]

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする。$\alpha = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right),\ \beta = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ のとき，$\arg\dfrac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$

\偏角 {性質C}[b]

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ を複素数とする。$\alpha = r_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right),\ \beta = r_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$ のとき，

$$\arg\frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2$$

\ドモアブルの定理 {公式}[i]

n が整数のとき，$\left(\cos\theta + i\sin\theta\right)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$

\ドモアブルの定理 {公式}[b]

n が整数のとき，

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

\ドモアブルの定理 {証明}

【証明】

複素数

$$\alpha_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ \alpha_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\ldots\alpha_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$$

に対して，$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ を考えると，三角関数の積和の公式から

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = r_1r_2\cdots r_n\{\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\}$$

となる。ここで，$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n$ のとき，

$$\Leftrightarrow (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

を得る。 (Q.E.D.)

\放物線 {定義}[i]

定点 F (焦点) と F を通らない直線 l (準線) があるとき，焦点と準線からの距離の和が一定な点の軌跡。

\放物線 {定義}[b]

定点 F (焦点) と F を通らない直線 l (準線) があるとき，焦点と準線からの距離の和が一定な点の軌跡。

\放物線 {性質A}[i]

放物線は $y^2 = 4px$ と表せられる。

\放物線 {性質A}[b]

放物線は

$$y^2 = 4px$$

と表せられる。

\放物線 {性質B}[i]

放物線の焦点は $F(p,\ 0)$

\放物線 {性質B}[b]

放物線の焦点は

$$F(p,\ 0)$$

\放物線 {性質C}[i]

放物線の準線は $x = -p$

\放物線 {性質C}[b]

放物線の準線は

$$x = -p$$

\楕円 {定義}[i]

二つの焦点 F と F' からの距離の和が一定な点の軌跡。

\楕円 {定義}[b]

二つの焦点 F と F' からの距離の和が一定な点の軌跡。

\楕円 {性質A}[i]

楕円は $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と表せられる。

\楕円 {性質A}[b]

楕円は

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

と表せられる。

\楕円 {性質B}[i]

楕円の焦点は $F\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$ と，$F'\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$

\楕円 {性質B}[b]

楕円の焦点は

$$F\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)F'\left(\sqrt{a^2-b^2},\ 0\right)$$

\楕円 {性質C}[i]

楕円の二つの焦点からの距離の和は $2a$ である。

\楕円 {性質C}[b]

楕円の二つの焦点からの距離の和は

$$2a$$

\双曲線 {定義}[i]

二つの焦点 F と F' からの距離の差が 0 でなく一定な点の軌跡。

\双曲線 {定義}[b]

二つの焦点 F と F' からの距離の差が 0 でなく一定な点の軌跡。

\双曲線 {性質A}[i]

双曲線は $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と表せられる。

\双曲線 {性質A}[b]

双曲線は

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

と表せられる。

\双曲線 {性質B}[i]

双曲線の焦点は $F\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$ と，$F'\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$

\双曲線 {性質B}[b]

双曲線の焦点は

$$F\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)F'\left(\sqrt{a^2+b^2},\ 0\right)$$

\双曲線 {性質C}[i]

双曲線の二つの焦点からの距離の差は $2a$

\双曲線 {性質C}[b]

双曲線の二つの焦点からの距離の差は

$$2a$$

\双曲線 {性質D}[i]

双曲線の漸近線は $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$

\双曲線 {性質D}[b]

双曲線の漸近線は

$$\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0,\ \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$$

\連続な関数 {公式}[i]

定義域の x の値 a に関して，$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$ のとき，$f(x)$ は $x=a$ で連続。

\連続な関数 {公式}[b]

定義域の x の値 a に関して，

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

のとき，$f(x)$ は $x=a$ で連続。

\中間値の定理 {公式}[i]

閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ について，$f(a)\neq f(b)$ のとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 k について，$f(c)=k$ となる c が少なからず一つ存在する。

\中間値の定理 {公式}[b]

閉区間 $[a,\ b]$ で連続な関数 $f(x)$ について，$f(a)\neq f(b)$ のとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 k について，

$$f(c)=k$$

となる c が少なからず一つ存在する。

\平均値の定理 {公式}[i]

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\,(a<c<b)$ を満たす c が存在する。

\平均値の定理 {公式}[b]

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a,\ b]$ で連続，開区間 $(a,\ b)$ で微分可能ならば，

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)\,(a<c<b)$$

を満たす c が存在する。

\微分 {定義}[i]

$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

\微分 {定義}[b]

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

\微分 {積の微分公式}[i]
$$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$
\微分 {積の微分公式}[b]

$$\{f(x)\,g(x)\}' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$$

\微分 {商の微分公式}[i]
$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$
\微分 {商の微分公式}[b]

$$\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\}' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{\{g(x)\}^2}$$

\微分 {合成関数の微分}[i]
$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\,g'(x)$$
\微分 {合成関数の微分}[b]

$$\{f(g(x))\}' = f'(g(x))\,g'(x)$$

\微分 {初等関数の微分公式A}[i]
$$(c)' = 0$$
\微分 {初等関数の微分公式A}[b]

$$(c)' = 0$$

\微分 {初等関数の微分公式B}[i]
$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (\alpha \text{ は実数})$$
\微分 {初等関数の微分公式B}[b]

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

α は実数
\微分 {初等関数の微分公式C}[i]
$$(\sin x)' = \cos x$$
\微分 {初等関数の微分公式C}[b]

$$(\sin x)' = \cos x$$

\微分 {初等関数の微分公式D}[i]
$$(\cos x)' = -\sin x$$
\微分 {初等関数の微分公式D}[b]

$$(\cos x)' = -\sin x$$

\微分 {初等関数の微分公式E}[i]
$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
\微分 {初等関数の微分公式E}[b]

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

\微分 {初等関数の微分公式F}[i]
$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$
\微分 {初等関数の微分公式F}[b]

$$(\log|x|)' = \frac{1}{x}$$

\微分 {初等関数の微分公式G}[i]
$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\log a}$$
\微分 {初等関数の微分公式G}[b]

$$(\log_a|x|)' = \frac{1}{x\log a}$$

\微分 {初等関数の微分公式H}[i]
$$(e^x)' = e^x$$
\微分 {初等関数の微分公式H}[b]

$$(e^x)' = e^x$$

\微分 {初等関数の微分公式I}[i]

$(a^x)' = a^x \log a$

\微分 {初等関数の微分公式I}[b]

$$(a^x)' = a^x \log a$$

\微分 {三角関数の微分公式の証明}

【証明】

$$\begin{aligned}
(\sin x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin x - \sin x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1-\cos x}{h} \frac{1+\cos h}{1+\cos h} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \frac{\sin h}{h} - \sin x \frac{1}{1+\cos h} \frac{\sin^2 h}{h^2} h \right) \\
&= \cos x \cdot 1 - \sin x \cdot \frac{1}{2} 1^2 \cdot 0 \\
&= \cos x \\
(\cos x)' &= \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \right\}' \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \cdot (-1) \\
&= -\sin x
\end{aligned}$$

(Q.E.D.)

\微分 {対数関数の微分公式の証明}

【証明】

$$\begin{aligned}
(\log x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log x}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log\left(1 + \frac{x}{h}\right)}{h}
\end{aligned}$$

ここで $\frac{h}{x} = t$ とおくと，$h = tx$ となり $\lim_{h\to 0} t = 0$ なので，

$$\begin{aligned}
(\log x)' &= \lim_{h\to 0} \frac{\log(1+t)}{xt} \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ \frac{\log(1+t)}{t} \cdot \frac{1}{x} \right\} \\
&= \lim_{h\to 0} \log(1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{x} \\
&= \log e \cdot \frac{1}{x} \\
&= \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$f(x)=e^x$ とおく。

$$\begin{aligned}(e^x)' &= \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}\\ &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\end{aligned}$$

ここで $(\log x)'=\dfrac{1}{x}$ より，$y=\log x$ の $x=1$ においての接線の傾きは 1 であり，$y=\log x$ と $y=e^x$ は $y=x$ において対称であるので $y=e^x$ の $x=0$ においての接線の傾きも 1 なので，

$$f'(0)\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=1$$

よって，

$$\begin{aligned}(e^x)' &= e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}\\ &= e^x\cdot 1\\ &= e^x\end{aligned}$$

（Q.E.D.）

\接線の方程式 {公式}[i]

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における曲線の接線の方程式は，$y-f(a)=f'(x)(x-a)$

\接線の方程式 {公式}[b]

曲線 $y=f(x)$ 上の点 $(a,\ f(a))$ における曲線の接線の方程式は，

$$y-f(a)=f'(x)(x-a)$$

\法線の方程式 {公式}[i]

曲線 $f(x)$ 上の点 $A(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

\法線の方程式 {公式}[b]

曲線 $f(x)$ 上の点 $A(a,\ f(a))$ における法線の方程式は，

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

\不定積分 {定義}[i]

$F'(x)=f(x)$ とすると，$\displaystyle\int f(x)\,dx=F(x)+C$（$C$ は積分定数）

\不定積分 {定義}[b]

$F'(x)=f(x)$ とすると，

$$\int f(x)\,dx=F(x)+C\text{（}C\text{ は積分定数）}$$

\不定積分 {置換積分}[i]

$\displaystyle\int f(x)\,dx=\int f(g(t))\,g'(t)\,dt$ （$x=g(t)$ に置換）

\不定積分 {置換積分}[b]

$$\int f(x)\,dx = \int f(g(t))\,g'(t)\,dt$$

($x = g(t)$ に置換)

\不定積分 {部分積分}[i]

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)$$

\不定積分 {部分積分}[b]

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)$$

\不定積分 {初等関数の積分公式A}[i]

C は積分定数とする。$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$

\不定積分 {初等関数の積分公式A}[b]

C は積分定数とする。

$$\int x^{\alpha}dx = \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1} + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式B}[i]

C は積分定数とする。$\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$

\不定積分 {初等関数の積分公式B}[b]

C は積分定数とする。

$$\int \frac{1}{x}dx = \log|x| + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式C}[i]

C は積分定数とする。$\int \sin x dx = -\cos x + C$

\不定積分 {初等関数の積分公式C}[b]

C は積分定数とする。

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式D}[i]

C は積分定数とする。$\int \cos x dx = \sin x + C$

\不定積分 {初等関数の積分公式D}[b]

C は積分定数とする。

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式E}[i]

C は積分定数とする。$\int e^{x}dx = e^{x} + C$

\不定積分 {初等関数の積分公式E}[b]

C は積分定数とする。

$$\int e^x dx = e^x + C$$

\不定積分 {初等関数の積分公式F}[i]

C は積分定数とする。$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\log a} + C$

\不定積分 {初等関数の積分公式F}[b]

C は積分定数とする。

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C$$

\定積分 {定義}[i]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸 (間は a から b) に囲まれた部分の面積 S について，$F'(x) = f(x)$ のとき，$S = \int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$

\定積分 {定義}[b]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸 (間は a から b) に囲まれた部分の面積 S について，$F'(x) = f(x)$ のとき，

$$S = \int_b^a f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

\区分求積法 {公式}[i]

$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,x$ ここで，$x = \dfrac{b-a}{n}$，$x_k = a + kx$

\区分求積法 {公式}[b]

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\,x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,x$$

ここで，

$$x = \frac{b-a}{n},\ x_k = a + kx$$

\体積の積分 {公式}[i]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間の部分 $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸の周りに一回転させてできる回転体の体積は，$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$

\体積の積分 {公式}[b]

曲線 $y = f(x)$ と x 軸の間の部分 $(a \leqq x \leqq b)$ を x 軸の周りに一回転させてできる回転体の体積は，

$$V = \pi \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx$$